МАТЕМАТИКА

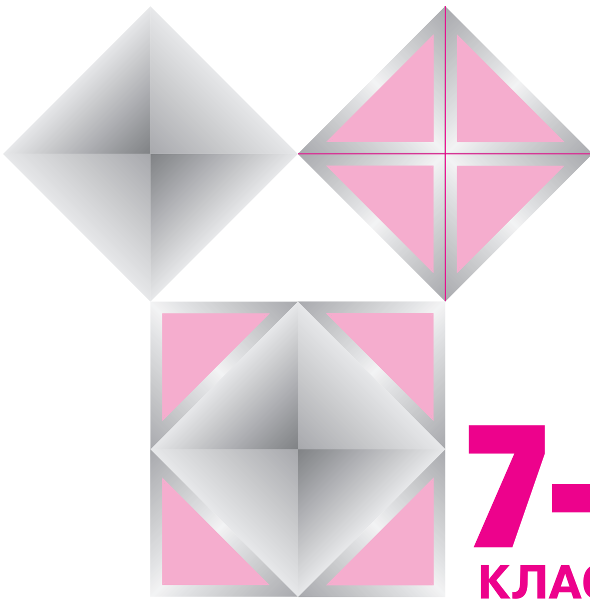
Геометрия

7–9

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

МАТЕМАТИКА

Геометрия



7–9

КЛАССЫ

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Учебник

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

15-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2024

УДК 373.167.1:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
М34
Авторы: Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина
Издание подготовлено под научным руководством академика А. Н. Тихонова

Учебник (15-е издание, стереотипное соответствует 14-му, переработанному) допущен к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, в соответствии с Приказом Министерства просвещения Российской Федерации № 858 от 21.09.2022 г.

Издание выходит в pdf-формате.

Математика. Геометрия : 7—9-е классы : базовый уровень : учебник : издание в pdf-формате / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. — 15-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2024. — 416 с. : ил.

М34

ISBN 978-5-09-116448-0 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-111167-5 (печ. изд.).

Содержание учебника позволяет достичь планируемых результатов обучения, предусмотренных ФГОС основного общего образования.

Учебник включает трёхступенчатую систему задач, а также исследовательские задачи, темы рефератов, список рекомендуемой литературы, что позволит учащимся расширить и углубить свои знания по геометрии.

Учебник подготовлен в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования, утверждённого Приказом Министерства просвещения № 287 от 31.05.2021 г.

УДК 373.167.1:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич, **Бутузов** Валентин Фёдорович
Кадомцев Сергей Борисович, **Позняк** Эдуард Генрихович
Юдина Ирина Игоревна

МАТЕМАТИКА
ГЕОМЕТРИЯ

7—9 классы
Базовый уровень
Учебник

Центр математики, физики и астрономии
Ответственный за выпуск *М. В. Кузнецова*
Редакторы *М. В. Кузнецова, Э. А. Мазурова*
Компьютерная вёрстка *С. Н. Терентьевой, О. В. Поповой*
Техническое редактирование *И. В. Грибковой*
Корректоры *И. В. Андрианова, В. К. Шаймарданов*

Дата подписания к использованию 16.10.2023. Формат 70×90/16. Гарнитура Школьная.
Усл. печ. л. 30,42. Уч.-изд. л. 18,7. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».

Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, помещение 1Н.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**.

ISBN 978-5-09-116448-0 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-111167-5 (печ. изд.)

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый предмет — геометрию и будете заниматься ею пять лет. Что это такое — геометрия?

Геометрия — одна из самых древних наук, она возникла очень давно, ещё до нашей эры. В переводе с греческого слово «геометрия» означает «землемерие» («гео» — по-гречески земля, а «метрео» — мерить). Такое название объясняется тем, что зарождение геометрии было связано с различными измерительными работами, которые приходилось выполнять при разметке земельных участков, проведении дорог, строительстве зданий и других сооружений. В результате этой деятельности появились и постепенно накапливались различные правила, связанные с геометрическими измерениями и построениями. Таким образом, геометрия возникла на основе практической деятельности людей, а в дальнейшем сформировалась как самостоятельная **наука, занимающаяся изучением геометрических фигур**.

На уроках математики вы познакомились с некоторыми геометрическими фигурами и представляете себе, что такое точка, прямая, отрезок, луч, угол (рис. 1), как они могут быть расположены относительно друг друга. Вы знакомы с такими фигурами, как треугольник, прямоугольник, окружность, круг и др. (рис. 2); знаете, как измеряются отрезки с помощью линейки с миллиметровыми делениями и как измеряются углы с помощью транспортира, знаете формулы для нахождения периметра и площади некоторых фигур. Но всё это лишь самые первые геометрические сведения. Теперь вам предстоит расширить и углубить ваши знания о геометрических фигурах. Вы познакомитесь с новыми фигурами и со многими важными и интересными свойствами уже известных вам фигур. Вы узнаете о том, как используются свойства геометрических фигур в практической деятельности. Во всём этом вам поможет учебник и, конечно, учитель.

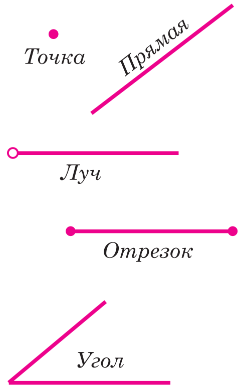


Рис. 1

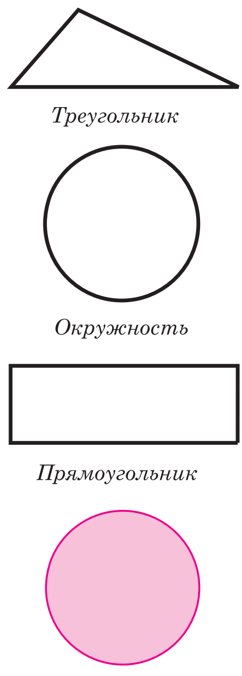


Рис. 2

Школьный курс геометрии делится на **планиметрию** и **стереометрию**. В планиметрии рассматриваются свойства фигур на плоскости. Примерами таких фигур являются отрезки, треугольники, прямоугольники. В стереометрии изучаются свойства фигур в пространстве, таких, как параллелепипед, шар, цилиндр (рис. 3). Мы начнём изучение геометрии с планиметрии.

В процессе изучения геометрии вы будете доказывать **теоремы** и решать **задачи**. Что такое «теорема» и что значит «доказать теорему» — об этом вы скоро узнаете. Ну а что такое задача — вам известно, на уроках математики вы решали разные задачи.

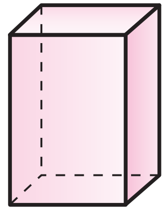
В нашем учебнике геометрии много задач: есть задачи и практические задания к каждому параграфу, дополнительные задачи к каждой главе и, наконец, задачи повышенной трудности. Основными являются задачи к параграфу. Более трудные задачи отмечены звёздочкой. Задачи, отмеченные знаком , можно решать с использованием компьютера (подходящие средства поможет выбрать учитель).

Задачи, отмеченные знаком , предполагают групповую работу.

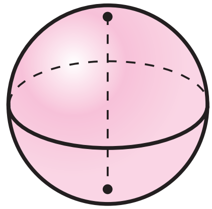
В конце книги к задачам даны ответы и указания.

Всем, кто проявит интерес к геометрии, кому понравится решать задачи и доказывать теоремы, мы советуем порешать не только обязательные задачи, но и задачи со звёздочкой, дополнительные задачи и задачи повышенной трудности. Решать такие задачи непросто, но интересно. Не всегда удаётся сразу найти решение. В таком случае не унывайте, а проявите терпение и настойчивость. Радость от решения трудной задачи будет вам наградой за упорство. Не бойтесь заглядывать вперёд, читать те параграфы, которые ещё не проходили в классе. Задавайте вопросы учителю, товарищам, родителям.

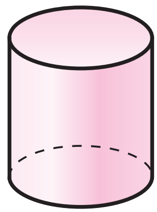
Доброго вам пути!



Прямоугольный параллелепипед



Шар



Цилиндр

Рис. 3

Глава I

Начальные геометрические сведения

В этой главе речь пойдёт о простейших геометрических фигурах — точках, прямых, отрезках, лучах, углах. С ними вы познакомились на уроках математики в 5 и 6 классах. К тому, что вы знаете об этих фигурах, мы добавим новые сведения, и они послужат нам опорой для изучения в следующих главах свойств более сложных фигур. Вы узнаете о практических приложениях геометрии — о том, как геометрия помогает прокладывать прямолинейные дороги и как проводится измерение углов на местности.

§1 Прямая и отрезок

1. Точки, прямые, отрезки

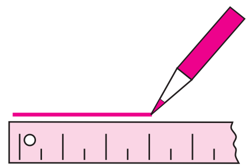
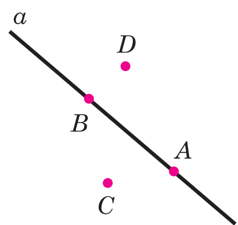


Рис. 4

Вспомним, что нам известно о точках и прямых. Мы знаем, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой (рис. 4), но при этом можно изобразить лишь часть прямой, а всю прямую мы представляем себе простирающейся бесконечно в обе стороны.

Обычно прямые обозначают малыми латинскими буквами, а точки — большими латинскими буквами. На рисунке 5 изображены прямая a и точки A, B, C и D. Точки A и B лежат на прямой a, а точки C и D не лежат на этой прямой. Можно сказать, что прямая a проходит через точки A и B, но не проходит через точки C и D. Отметим, что через точки A и B нельзя провести другую прямую, не совпадающую с прямой a. Вообще



Прямая и точки

Рис. 5

через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну[1].

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

Рассмотрим теперь две прямые. Если они имеют общую точку, то говорят, что эти прямые пересекаются. На рисунке 6 прямые a и b пересекаются в точке O, а прямые p и q не пересекаются. Две прямые не могут иметь более одной общей точки. В самом деле, если бы две прямые имели две общие точки, то каждая из прямых проходила бы через эти точки. Но через две точки проходит только одна прямая. Таким образом, можно сделать вывод: **две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.**

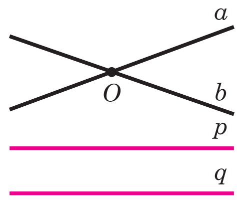


Рис. 6

Прямую, на которой отмечены две точки, например A и B, иногда обозначают двумя буквами: AB или BA. Для краткости вместо слов «точка A лежит на прямой a» используют запись $A \in a$, а вместо слов «точка B не лежит на прямой a» — запись $B \notin a$.

На рисунке 7, *а* выделена часть прямой, ограниченная двумя точками. Такая часть прямой называется **отрезком**. Точки, ограничивающие отрезок, называются его **концами**. На рисунке 7, *б* изображён отрезок с концами A и B. Такой отрезок обозначается AB или BA. Отрезок AB содержит точки A и B и все точки прямой AB, лежащие между A и B.

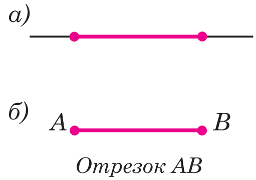


Рис. 7

Последовательно соединяя отрезки, можно получить геометрическую фигуру, которую называют **ломаной**. Она составлена из отрезков так, что **смежные** отрезки (т. е. отрезки AB и BC, BC и CD, ..., EF и FG) не лежат на одной прямой (рис. 8, *а*). Отрезки, из которых составлена ломаная, называются **звеньями ломаной**, концы этих отрезков — **вершинами ломаной**. На рисунке 8, *а* изображена ломаная $ABCD...FG$. Концы ломаной $ABCD...FG$, т. е. точки A и G, могут быть различны, а могут совпадать (рис. 8, *б*). В последнем случае ломаная называется **замкнутой**.

Если несмежные звенья замкнутой ломаной не имеют общих точек, то эта ломаная называется **многоугольником**, её звенья называются **сторонами многоугольника**. В зависимости от количества

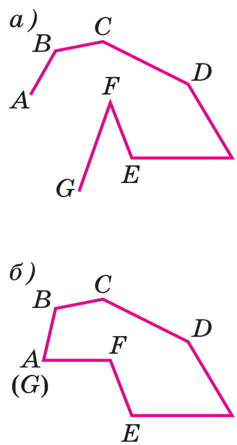


Рис. 8

сторон (вершин) многоугольника выделяют треугольники, четырёхугольники, пятиугольники и т. д. Многоугольник с n вершинами называется n-угольником, он имеет n сторон. На рисунке 9 изображены четырёхугольник $ABCD$, пятиугольник $ABCDE$ и шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

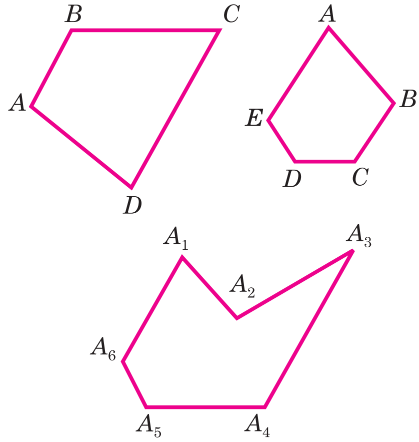


Рис. 9

Фигура, изображённая на рисунке 10, не является многоугольником, так как несмежные отрезки C_1C_5 и C_2C_3 (а также C_3C_4 и C_1C_5) имеют общую точку.

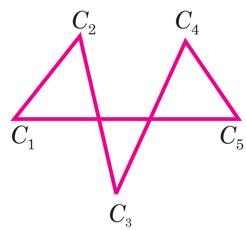


Рис. 10

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** многоугольника.

На рисунке 11 внутренние области многоугольников закрашены. Фигуру, состоящую из сторон многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

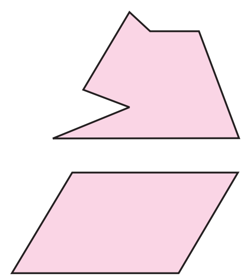


Рис. 11

2. Провешивание прямой на местности

Решим такую задачу: с помощью данной линейки построить отрезок более длинный, чем сама линейка. С этой целью приложим к листу бумаги линейку, отметим точки A и B и какую-нибудь точку C, лежащую между точками A и B (рис. 12, *а*). Затем передвинем линейку вправо так, чтобы её левый конец оказался около точки C, и отметим точку D около правого конца линейки (рис. 12, *б*). Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Если мы проведём теперь отрезок AB, а затем отрезок BD, то получим отрезок AD, более длинный, чем линейка.

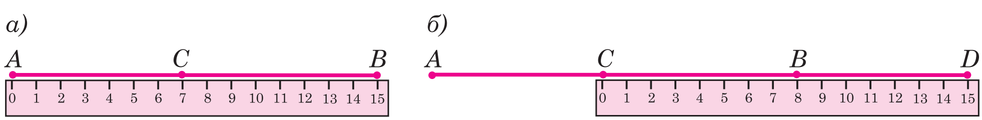


Рис. 12

Аналогичный приём используется для «проведения» длинных отрезков прямых на местности. Этот приём заключается в следующем. Сначала отмечают какие-нибудь точки A и B. Для этой цели используют две вехи — шесты длиной около 2 м, заострённые на одном конце для того, чтобы их можно было воткнуть в землю. Третью веху ставят так, чтобы вехи, стоящие в точках A и B, закрывали её от наблюдателя, находящегося в точке A (точка C на рисунке 13). Следующую веху ставят так, чтобы её закрывали вехи, стоящие в точках B и C, и т. д.

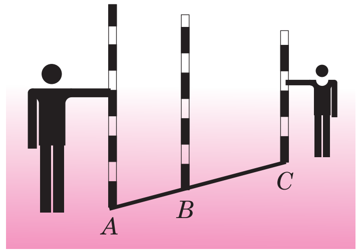


Рис. 13

Описанный приём называется **провешиванием** прямой (от слова «веха»). Он широко используется на практике, например при рубке лесных просек, при прокладывании шоссейных или железных дорог, линий высоковольтных передач и т. д.

Практические задания

1 Проведите прямую, обозначьте её буквой a и отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки P, Q и R, не лежащие на ней. Опишите взаимное расположение точек A, B, P, Q, R и прямой a, используя символы $\in$ и $\notin$.

2 Отметьте три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, и через каждую пару точек проведите прямую. Сколько прямых получилось?

3 Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.

4 Отметьте точки A, B, C, D так, чтобы точки A, B, C лежали на одной прямой, а точка D не лежала на ней. Через каждые две точки проведите прямую. Сколько получилось прямых?

5 Проведите прямую a и отметьте на ней точки A и B. Отметьте: а) точки M и N, лежащие на отрезке AB; б) точки P и Q, лежащие на прямой a, но не лежащие на отрезке AB; в) точки R и S, не лежащие на прямой a.

6 Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?

7 На рисунке 14 изображена прямая, на ней отмечены точки A, B, C и D. Назовите все отрезки: а) на которых лежит точка C; б) на которых не лежит точка B.

Рис. 14

8 Начертите ломаную из трёх звеньев, которая: а) является замкнутой, б) не является замкнутой.

9 Цифры почтового индекса записываются по определённым правилам (рис. 15) для удобства распознавания сортировочным автоматом.

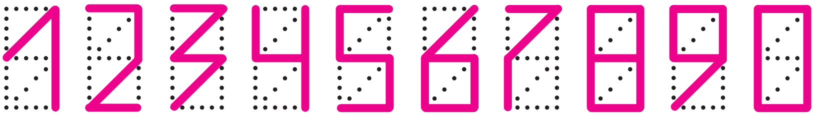


Рис. 15

Укажите на рисунке цифры, в записи которых используются ломаные. Сколько звеньев у каждой ломаной? Укажите замкнутую ломаную. Как называется многоугольник, образованный на рисунке замкнутой ломаной?

10 Начертите пятиугольник, как на рисунке 9. Разбейте его на треугольники так, чтобы у пятиугольника и каждого треугольника были общие стороны. Сколько треугольников может получиться на чертеже? Какие ещё многоугольники получились на чертеже?

§2 Луч и угол

3. Луч

Проведём прямую a и отметим на ней точку O (рис. 16). Эта точка разделяет прямую на две части, каждая из которых называется **лучом, исходящим из точки *O*** (на рисунке 16 один из лучей выделен цветной линией). Точка O называется **началом** каждого из лучей. Обычно луч обозначают либо малой латинской буквой (например, луч h на рисунке 17, *а*), либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая — какую-нибудь точку на луче (например, луч OA на рисунке 17, *б*).

Точка O разделяет прямую на два луча

Рис. 16

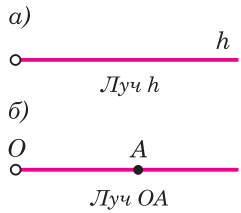


Рис. 17

4. Угол

Напомним, что **угол** — это геометрическая фигура, которая состоит из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**.

На рисунке 18 изображён угол с вершиной O и сторонами h и k. На сторонах отмечены точки A и B. Этот угол обозначают так: $\angle hk$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

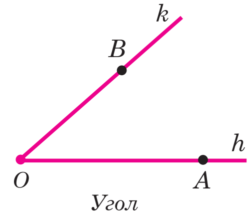


Рис. 18

Угол называется **развёрнутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой. Можно сказать, что каждая сторона развёрнутого угла является продолжением другой стороны. На рисунке 19 изображён развёрнутый угол с вершиной C и сторонами p и q.

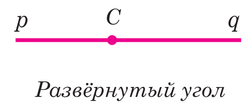


Рис. 19

Любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвёрнутый, то одна из частей называется **внутренней**, а другая — **внешней областью** этого угла (рис. 20, *а*). На рисунке 20, *б* изображён неразвёрнутый угол. Точки A, B, C лежат внутри этого угла (т. е. во внутренней области угла), точки D и E — на сторонах угла, а точки P и Q — вне угла (т. е. во внешней области угла).

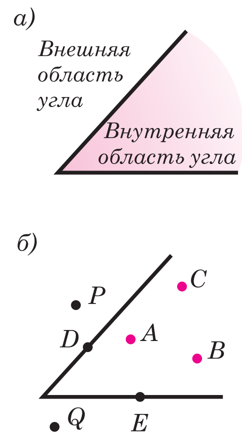


Рис. 20

Если угол развёрнутый, то любую из двух частей, на которые он разделяет плоскость, можно считать внутренней областью угла.

Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит внутри угла, то он делит этот угол на два угла. На рисунке 21, *а* луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Если угол AOB развёрнутый, то любой луч OC, не совпадающий с лучами OA и OB, делит этот угол на два угла: AOC и COB (рис. 21, *б*).

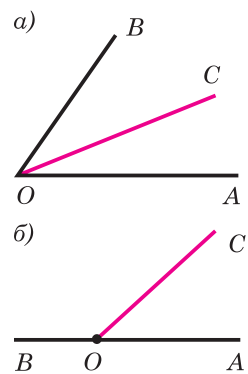


Рис. 21

Практические задания

11 Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C. а) Среди лучей AB, BC, CA, AC и BA назовите совпадающие лучи; б) назовите луч, который является продолжением луча CA.

12 Начертите три неразвёрнутых угла и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle hk$, $\angle M$.

13 Начертите два развёрнутых угла и обозначьте их буквами.

14 Начертите три луча h, k и l с общим началом. Назовите все углы, образованные данными лучами.

15 Начертите неразвёрнутый угол hk. Отметьте две точки внутри этого угла, две точки вне этого угла и две точки на сторонах угла.

16 Начертите неразвёрнутый угол. Отметьте точки A, B, M и N так, чтобы все точки отрезка AB лежали внутри угла, а все точки отрезка MN лежали вне угла.

17 Начертите неразвёрнутый угол AOB и проведите: а) луч OC, который делит угол AOB на два угла; б) луч OD, который не делит угол AOC на два угла.

18 Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении двух прямых?

19 Какие из точек, изображённых на рисунке 22, лежат внутри угла hk, а какие — вне этого угла?

20 Какие из лучей, изображённых на рисунке 23, делят угол AOB на два угла?

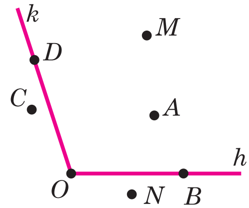


Рис. 22

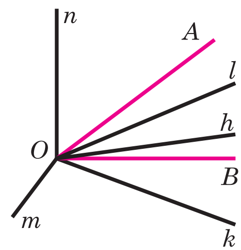


Рис. 23

§3 Сравнение отрезков и углов

5. Равенство геометрических фигур

Среди окружающих нас предметов встречаются такие, которые имеют одинаковую форму и одинаковые размеры. Например, два одинаковых листа бумаги, две одинаковые книги, два одинаковых автомобиля. В геометрии две фигуры, имеющие одинаковую форму и одинаковые размеры, называют равными.

На рисунке 24 изображены фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$. Чтобы установить, равны они или нет, поступим так. Скопируем фигуру $Ф_1$ на кальку.

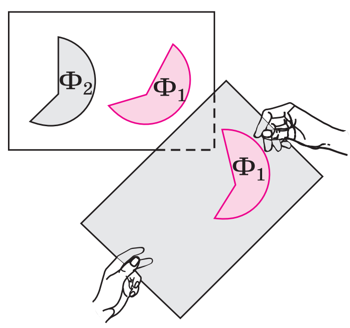


Рис. 24

Передвигая кальку и накладывая её на фигуру Φ_2 той или другой стороной, попытаемся совместить копию фигуры Φ_1 с фигурой Φ_2. Если они совместятся, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2.

Мы можем представить себе, что на фигуру Φ_2 накладывается не копия фигуры Φ_1, равная этой фигуре, а сама фигура Φ_1. Поэтому в дальнейшем будем говорить о наложении самой фигуры (а не копии) на другую фигуру. Итак, две геометрические фигуры называются **равными**, если их можно совместить наложением.

6. Сравнение отрезков и углов

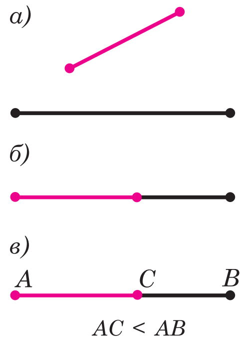
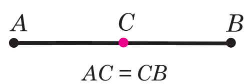


Рис. 25



Точка C – середина отрезка AB

Рис. 26

На рисунке 25, *а* изображены два отрезка. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один отрезок на другой так, чтобы конец одного отрезка совместился с концом другого (рис. 25, *б*). Если при этом два других конца также совместятся, то отрезки полностью совместятся и, значит, они равны. Если же два других конца не совместятся, то меньшим считается тот отрезок, который составляет часть другого. На рисунке 25, *в* отрезок AC составляет часть отрезка AB, поэтому отрезок AC меньше отрезка AB (пишут так: $AC < AB$).

Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется **серединой отрезка**. На рисунке 26 точка C — середина отрезка AB.

На рисунке 27, *а* изображены неразвёрнутые углы 1 и 2. Чтобы установить, равны они или нет, наложим один угол на другой так, что-

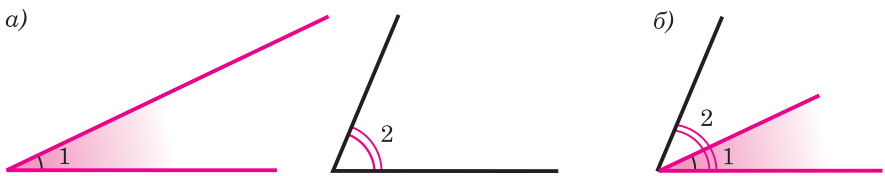


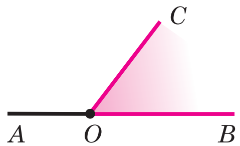
Рис. 27

бы сторона одного угла совместилась со стороной другого, а две другие оказались по одну сторону от совместившихся сторон (рис. 27, *б*).

Если две другие стороны также совместятся, то углы полностью совместятся и, значит, они равны. Если же эти стороны не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 27, *б* угол 1 составляет часть угла 2, поэтому $\angle 1 < \angle 2$.

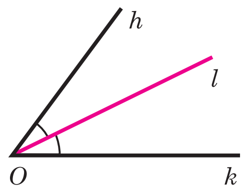
Неразвёрнутый угол составляет часть развёрнутого угла (рис. 28), поэтому развёрнутый угол больше неразвёрнутого угла. Любые два развёрнутых угла, очевидно, равны.

Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой угла**. На рисунке 29 луч l — биссектриса угла hk.



Неразвёрнутый угол COB составляет часть развёрнутого угла AOB

Рис. 28



$\angle hl = \angle lk$
Луч l – биссектриса угла hk

Рис. 29

Задачи

21 На луче с началом O отмечены точки A, B и C так, что точка B лежит между точками O и A, а точка A — между точками O и C. Сравните отрезки OB и OA, OC и OA, OB и OC.

22 Точка O является серединой отрезка AB. Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB; б) OA и AB?

23 На рисунке 30 отрезки AB, BC, CD и DE равны. Укажите: а) середины отрезков AC, AE и CE; б) отрезок, серединой которого является точка D; в) отрезки, серединой которых является точка C.

Рис. 30

24 Луч OC делит угол AOB на два угла. Сравните углы AOB и AOC.

25 Луч l — биссектриса угла hk. Можно ли наложением совместить углы: а) hl и lk; б) hl и hk?

26 На рисунке 31 углы, обозначенные цифрами, равны. Укажите: а) биссектрису каждого из углов AOC, BOF, AOE; б) все углы, биссектрисой которых является луч OC. Сравните углы BOC и BOD.

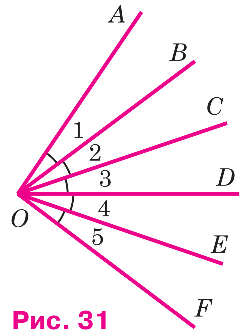
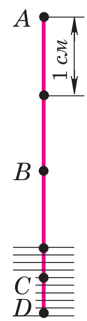


Рис. 31

§4 Измерение отрезков

7. Длина отрезка

На практике часто приходится измерять отрезки, т. е. находить их длины. Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за **единицу измерения** (его называют также **масштабным отрезком**). Если, например, за единицу измерения принят сантиметр, то для определения длины отрезка узнают, сколько раз в этом отрезке укладывается сантиметр. На рисунке 32 в отрезке AB сантиметр укладывается ровно 2 раза. Это означает, что длина отрезка AB равна 2 см. Обычно говорят кратко: «Отрезок AB равен 2 см» — и пишут: $AB = 2$ см.



$AB = 2$ *см*, $AC = 3{,}4$ *см*, $AD \approx 3{,}8$ *см*

Рис. 32

Может оказаться так, что отрезок, принятый за единицу измерения, не укладывается целое число раз в измеряемом отрезке — получается остаток. Тогда единицу измерения делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и определяют, сколько раз одна такая часть укладывается в остатке. Например, на рисунке 32 в отрезке AC сантиметр укладывается 3 раза, и в остатке ровно 4 раза укладывается одна десятая часть сантиметра (миллиметр), поэтому длина отрезка AC равна 3,4 см.

Возможно, однако, что и взятая часть единицы измерения (в данном случае миллиметр) не укладывается в остатке целое число раз, и получается новый остаток. Так будет, например, с отрезком AD на рисунке 32, в котором сантиметр укладывается 3 раза с остатком, а в остатке миллиметр укладывается 8 раз вновь с остатком. В таком случае говорят, что длина отрезка AD приближённо равна 3,8 см.

Для более точного измерения этого отрезка указанную часть единицы измерения (миллиметр) можно разделить на 10 равных частей и продолжить процесс измерения. Мысленно этот процесс можно продолжать и дальше, измеряя длину отрезка со всё большей точностью. На практике, однако, пользуются приближёнными значениями длин отрезков.

За единицу измерения можно принимать не только сантиметр, но и любой другой отрезок. **Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом.** Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в измеряемом отрезке.

Если два отрезка равны, то единица измерения и её части укладываются в этих отрезках одинаковое число раз, т. е. **равные отрезки имеют равные длины**. Если же один отрезок меньше другого, то единица измерения (или её часть) укладывается в этом отрезке меньшее число раз, чем в другом, т. е. **меньший отрезок имеет меньшую длину**.

На рисунке 33 изображён отрезок AB. Точка C делит его на два отрезка: AC и CB. Мы видим, что $AC = 3$ см, $CB = 2{,}7$ см, $AB = 5{,}7$ см. Таким образом, $AC + CB = AB$. Ясно, что и во всех других случаях, **когда точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.**

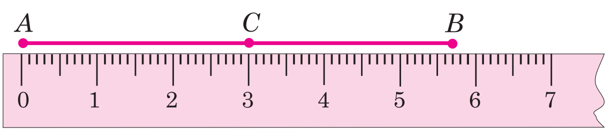


Рис. 33

$AC + CB = AB$

Если длина отрезка CD в k раз больше длины отрезка AB, то пишут $CD = kAB$.

Длина отрезка называется также **расстоянием** между концами этого отрезка.

Если известны длины отрезков, являющихся звеньями ломаной, то можно найти длину ломаной. Для этого надо вычислить сумму длин всех её звеньев. Длина замкнутой ломаной называется **периметром многоугольника**.

8. Единицы измерения. Измерительные инструменты

Для измерения отрезков и нахождения расстояний на практике используют различные единицы измерения. Стандартной международной единицей измерения отрезков выбран **метр** — отрезок, приближённо равный $\frac{1}{40\,000\,000}$ части земного меридиана. Эталон метра в виде специального металлического бруска хранится в Международном бюро мер и весов во Франции. Копии эталона хранятся в других странах, в том числе и в России. Один метр содержит сто сантиметров. В одном сантиметре десять миллиметров.

При измерении небольших расстояний, например расстояния между точками, изображёнными на листе бумаги, за единицу измерения принимают сантиметр или миллиметр. Расстояние между отдельными предметами в комнате измеряют в метрах, расстояние между населёнными пунктами — в **километрах**. Используются и другие единицы измерения, например **дециметр, морская миля** (1 миля равна 1,852 км). В астрономии для измерения очень больших расстояний за единицу измерения принимают **световой год**, т. е. путь, который свет проходит в течение одного года.

Мы назвали единицы измерения расстояний, которые используются на практике в наше время. В старину в разных странах существовали свои единицы измерения. Так, на Руси использовались аршин (0,7112 м), сажень (2,1336 м) и др.

На практике для измерения расстояний пользуются различными инструментами. Например, в техническом черчении употребляется **масштабная миллиметровая линейка.** Для измерения диаметра трубки используют **штангенциркуль** (рис. 34). С его помощью можно измерять расстояния с точностью до 0,1 мм. Для измерения расстояний на местности пользуются **рулеткой,** которая представляет собой ленту с нанесёнными на ней делениями (рис. 35).

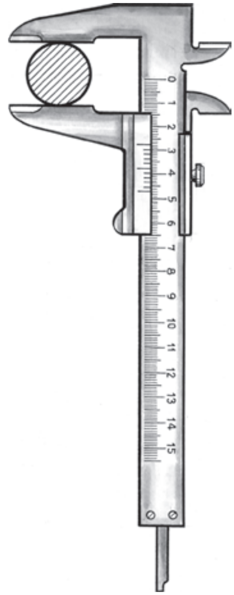


Рис. 34

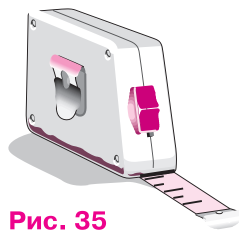


Рис. 35

Практические задания

27 Измерьте ширину и длину учебника геометрии и выразите их в сантиметрах и в миллиметрах.

28 Измерив толщину учебника геометрии без обложки, найдите толщину одного листа.

29 Найдите длины всех отрезков, изображённых на рисунке 36, если за единицу измерения принят отрезок: а) KL; б) AB.

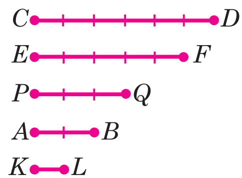


Рис. 36

30 Начертите отрезок AB и луч h. Пользуясь масштабной линейкой, отложите на луче h от его начала отрезки, длины которых равны $2AB$, $\frac{1}{2}AB$ и $\frac{1}{4}AB$.

31 Начертите прямую и отметьте на ней точки A и B. С помощью масштабной линейки отметьте точки C и D так, чтобы точка B была серединой отрезка AC, а точка D — серединой отрезка BC.

32 Начертите прямую AB. С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку C, такую, что $AC = 2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой AB?

Задачи

33 Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC, если $AB = 7{,}8$ см, $BC = 25$ мм.

34 Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC, если:
а) $AB = 3{,}7$ см, $AC = 7{,}2$ см;
б) $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.

35 Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

36 Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние BM?

37 Точка C — середина отрезка AB, равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA.

38 Расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом приблизительно равно 650 км. Город Тверь находится между этими городами в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Тверью и Санкт-Петербургом, считая, что все три города расположены на одной прямой.

39 Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см?

Решение
Если точки A, B и C лежат на одной прямой, то больший из отрезков AB, BC и AC равен сумме двух других. По условию больший из данных отрезков (отрезок AC) равен 5 см, а сумма двух других ($AB + BC$) равна 7 см. Поэтому точки A, B и C не лежат на одной прямой.

40 Точка C — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка AC. Найдите:
а) AC, CB, AO и OB, если $AB = 2$ см;
б) AB, AC, AO и OB, если $CB = 3{,}2$ м.

41 На прямой отмечены точки O, A и B так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB, если точка O:
а) лежит на отрезке AB;
б) не лежит на отрезке AB.

42 Отрезок, длина которого равна a, разделён произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

43 Отрезок, равный 28 см, разделён на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

44 На рисунке 37 изображены несколько ломаных, все звенья которых имеют длину 3 см. Найдите длины всех замкнутых ломаных. Укажите ломаную, имеющую наибольшую длину.

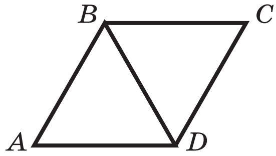


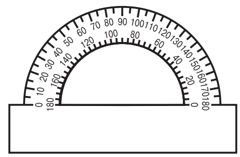
Рис. 37

§5 Измерение углов

9. Градусная мера угла

Измерение углов аналогично измерению отрезков — оно основано на сравнении их с углом, принятым за единицу измерения. Обычно за единицу измерения углов принимают **градус** — угол, равный $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла. Эта единица измерения углов была введена много веков назад, ещё до нашей эры.

Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется **градусной мерой угла**. Для измерения углов используется транспортир (рис. 38).



Транспортир

Рис. 38

На рисунке 39, *а* изображён угол AOB, градусная мера которого равна 150°. Обычно говорят кратко: «Угол AOB равен 150°» — и пишут: $\angle AOB = 150°$. На рисунке 39, *б* угол hk равен 40° ($\angle hk = 40°$). Определённые части градуса носят специальные названия: $\frac{1}{60}$ часть градуса называется **минутой**, $\frac{1}{60}$ часть минуты называется **секундой**. Минуты обозначают знаком «′», а секунды — знаком «″». Например, угол в 60 градусов, 32 минуты и 17 секунд обозначается так: $60°32'17''$.

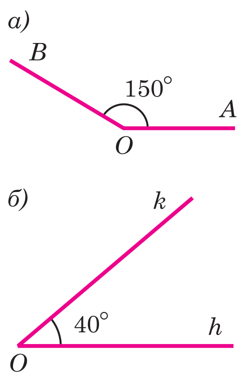


Рис. 39

Если два угла равны, то градус и его части укладываются в этих углах одинаковое число раз, т. е. **равные углы имеют равные градусные меры.**

Если же один угол меньше другого, то в нём градус (или его часть) укладывается меньшее число раз, чем в другом угле, т. е. **меньший угол имеет меньшую градусную меру.**

Так как градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развёрнутого угла, то он укладывается в развёрнутом угле ровно 180 раз, т. е. **развёрнутый угол равен 180°.**

Неразвёрнутый угол меньше развёрнутого угла, поэтому **неразвёрнутый угол меньше 180°.**

На рисунке 40 изображены лучи с началом в точке O. Луч OC делит угол AOB на два угла: AOC и COB. Мы видим, что $\angle AOC = 40°$, $\angle COB = 120°$, $\angle AOB = 160°$. Таким образом,

$$\angle AOC + \angle COB = \angle AOB.$$

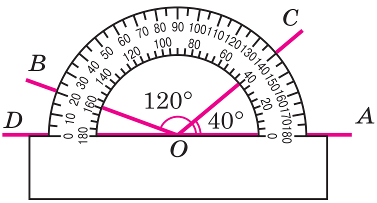


Рис. 40

Ясно, что и во всех других случаях, **когда луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.**

Угол называется **прямым**, если он равен 90° (рис. 41, *а*), **острым**, если он меньше 90°, т. е. меньше прямого угла (рис. 41, *б*), **тупым**, если он больше 90°, но меньше 180°, т. е. больше прямого, но меньше развёрнутого угла (рис. 41, *в*).

Прямые углы мы видим в окружающей нас обстановке: прямой угол образуют линии пересечения стен и потолка в комнате, два края стола прямоугольной формы и т. д.

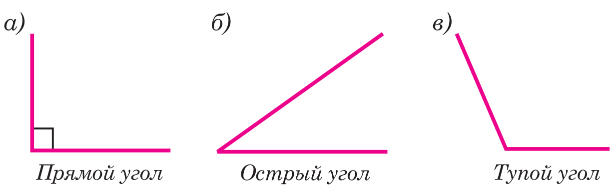


Рис. 41

10. Измерение углов на местности

Измерение углов на местности проводится с помощью специальных приборов. Простейшим из них является **астролябия** (рис. 42). Она состоит из двух частей: диска, разделённого на градусы, и вращающейся вокруг центра диска линейки (алидады). На концах алидады находятся два узких окошечка, которые используются для установки её в определённом направлении.

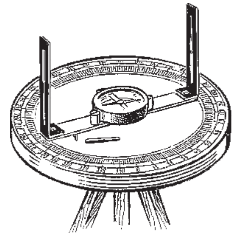


Рис. 42

Для того чтобы измерить угол AOB на местности, треножник с астролябией ставят так, чтобы отвес, подвешенный к центру диска, находился точно над точкой O. Затем устанавливают алидаду вдоль одной из сторон OA или OB и отмечают деление, против которого находится указатель алидады. Далее поворачивают алидаду, направляя её вдоль другой стороны измеряемого угла, и отмечают деление, против которого окажется указатель алидады. Разность отсчёта и даёт градусную меру угла AOB.

Измерения углов проводятся в различных исследованиях, например в астрономии при определении положения небесных тел. Очень важно с достаточной точностью измерять углы при определении положения искусственных спутников на орбитах. Для этой цели конструируют специальные приборы. Данные, полученные с помощью этих приборов, обрабатываются на компьютерах.

Практические задания

45 Начертите три неразвёрнутых угла и один развёрнутый угол и обозначьте их так: $\angle AOB$, $\angle CDE$, $\angle hk$ и $\angle MNP$. С помощью транспортира измерьте углы и запишите результаты измерений.

46 Начертите луч OA и с помощью транспортира отложите от луча OA углы AOB, AOC и AOD так, чтобы $\angle AOB = 23°$, $\angle AOC = 67°$, $\angle AOD = 138°$.

47 Начертите угол, равный $70°$, и с помощью транспортира проведите его биссектрису.

48 Начертите угол AOB и с помощью транспортира проведите луч OC так, чтобы луч OA являлся биссектрисой угла BOC. Всегда ли это выполнимо?

Задачи

49 Градусные меры двух углов равны. Равны ли сами углы?

50 На рисунке 43 изображены лучи с общим началом O.
а) Найдите градусные меры углов AOX, BOX, AOB, COB, DOX;
б) назовите углы, равные $20°$;
в) назовите равные углы;
г) назовите все углы со стороной OA и найдите их градусные меры.

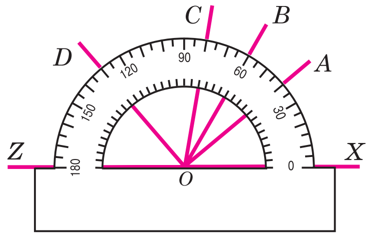


Рис. 43

51 Луч OE делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOB, если:
а) $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$;
б) $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$.

52 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол COB, если $\angle AOB = 78°$, а угол AOC на $18°$ меньше угла BOC.

53 Луч OC делит угол AOB на два угла. Найдите угол AOC, если $\angle AOB = 155°$, а угол AOC на $15°$ больше угла COB.

54 Угол AOB является частью угла AOC. Известно, что $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\angle BOC$. Найдите угол AOB.

55 На рисунке 44 угол AOD — прямой, $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOB и COD.

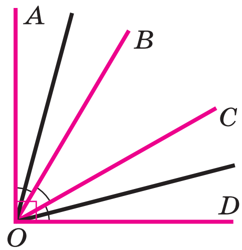


Рис. 44

56 На рисунке 45 луч OV является биссектрисой угла ZOY, а луч OU — биссектрисой угла XOY. Найдите угол XOZ, если $\angle UOV = 80°$.

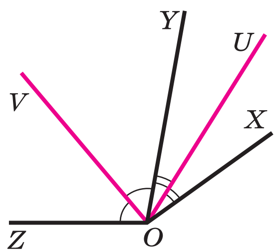


Рис. 45

57 Луч l является биссектрисой неразвёрнутого угла hk. Может ли угол hl быть прямым или тупым?

§6 Перпендикулярные прямые

11. Смежные и вертикальные углы

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

На рисунке 46 углы AOB и BOC смежные. Так как лучи OA и OC образуют развёрнутый угол, то

$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC = 180°.$$

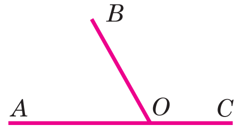


Рис. 46

Таким образом, **сумма смежных углов равна 180°.**

Два угла называются **вертикальными,** если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

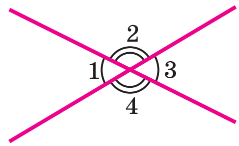


Рис. 47

На рисунке 47 углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 — вертикальные.

Угол 2 является смежным как с углом 1, так и с углом 3. По свойству смежных углов $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 3 + \angle 2 = 180°$. Отсюда получаем: $\angle 1 = 180° - \angle 2$, $\angle 3 = 180° - \angle 2$. Таким образом, $\angle 1 = \angle 3$, т. е. **вертикальные углы равны.**

12. Перпендикулярные прямые

Две пересекающиеся прямые образуют четыре неразвёрнутых угла (см. рис. 47). Величина того из этих углов, который не превосходит каждого из трёх остальных, называется **углом между пересекающимися прямыми.** Если один из четырёх углов прямой (угол 1 на рис. 48), то остальные углы также прямые (объясните почему).

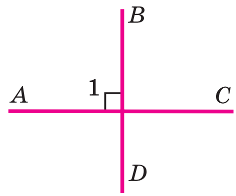


Рис. 48

Две пересекающиеся прямые называются **перпендикулярными** (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.

Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$ (читается: «Прямая AC перпендикулярна к прямой BD»).

Отметим, что **две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются** (рис. 49, *а*).

В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 49, *б*). Мысленно перегнём рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично луч QB наложится на луч QB_1.

Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 49, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертёжный треугольник и линейку (рис. 50).

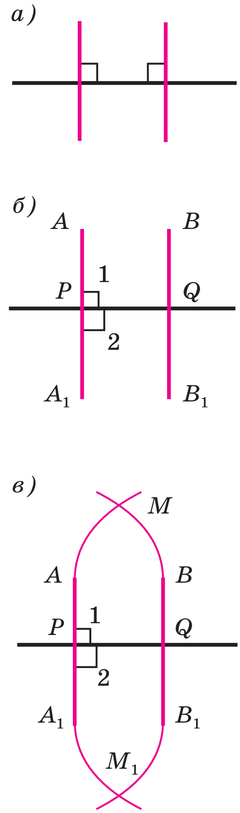


Рис. 49

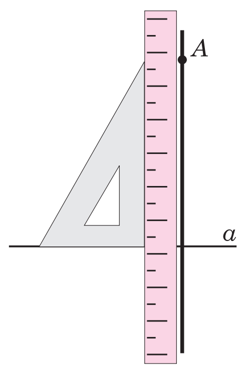


Рис. 50

13. Построение прямых углов на местности

Для построения прямых углов на местности применяют специальные приборы, простейшим из которых является **экер**.

Экер представляет собой два бруска, расположенных под прямым углом и укреплённых на треножнике (рис. 51). На концах брусков вбиты гвозди так, что прямые, проходящие через них, взаимно перпендикулярны.

Чтобы построить на местности прямой угол с заданной стороной OA, устанавливают треножник с экером так, чтобы отвес находился точно над точкой O, а направление одного бруска совпало с направлением луча OA. Совмещение этих направлений можно осуществить с помощью вехи, поставленной на луче.

Затем провешивают прямую линию по направлению другого бруска (прямая OB на рисунке 51). Получается прямой угол AOB.

В геодезии для построения прямых углов используют более совершенные приборы, например **теодолит**.

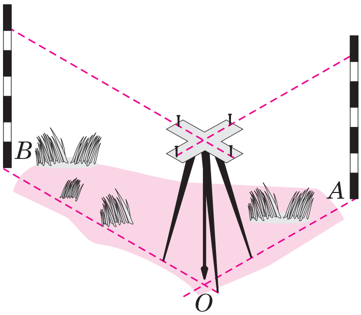


Рис. 51

Практические задания

58 Начертите острый угол AOB и на продолжении луча OB отметьте точку D. Сравните углы AOB и AOD.

59 Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них начертите смежный угол.

60 Начертите неразвёрнутый угол hk. Постройте угол h_1k_1 так, чтобы углы hk и h_1k_1 были вертикальными.

61 Начертите неразвёрнутый угол MON и отметьте точку P внутри угла и точку Q вне его. С помощью чертёжного угольника и линейки через точки P и Q проведите прямые, перпендикулярные к прямым OM и ON.

Задачи

62 Найдите угол, смежный с углом ABC, если:
а) $\angle ABC = 111°$; б) $\angle ABC = 90°$; в) $\angle ABC = 15°$.

63 Один из смежных углов прямой. Каким (острым, прямым, тупым) является другой угол?

64 Верно ли утверждение: если смежные углы равны, то они прямые?

65 Найдите смежные углы hk и kl, если:
а) $\angle hk$ меньше $\angle kl$ на $40°$;
б) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $120°$;
в) $\angle hk$ больше $\angle kl$ на $47°18'$;
г) $\angle hk = 3\angle kl$;
д) $\angle hk : \angle kl = 5 : 4$.

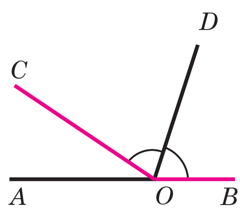


Рис. 52

66 На рисунке 52 углы BOD и COD равны. Найдите угол AOD, если $\angle COB = 148°$.

67 Даны два равных угла. Равны ли смежные с ними углы?

68 Найдите изображённые на рисунке 47 углы:
а) 1, 3, 4, если $\angle 2 = 117°$;
б) 1, 2, 4, если $\angle 3 = 43°27'$.

69 Найдите неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если:
а) сумма двух из них равна $114°$;
б) сумма трёх углов равна $220°$.

70 На рисунке 47 (см. с. 23) найдите углы 1, 2, 3, 4, если:
а) $\angle 2 + \angle 4 = 220°$;
б) $3(\angle 1 + \angle 3) = \angle 2 + \angle 4$;
в) $\angle 2 - \angle 1 = 30°$.

71 На рисунке 53 изображены три прямые, пересекающиеся в точке O. Найдите сумму углов: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

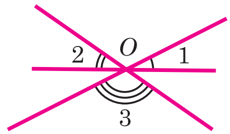


Рис. 53

72 На рисунке 54 $\angle AOB = 50°$, $\angle FOE = 70°$. Найдите углы AOC, BOD, COE и угол между прямыми AD и FC.

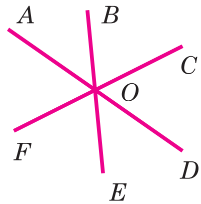


Рис. 54

73 Прямая a пересекает стороны угла A в точках P и Q. Могут ли обе прямые AP и AQ быть перпендикулярными к прямой a?

74 Через точку A, не лежащую на прямой a, проведены три прямые, пересекающие прямую a. Докажите, что по крайней мере две из них не перпендикулярны к прямой a.

Вопросы для повторения к главе I

1 Сколько прямых можно провести через две точки?

2 Сколько общих точек могут иметь две прямые?

3 Объясните, что такое отрезок.

4 Какая фигура называется ломаной? Объясните, что такое вершины и звенья ломаной.

5 Какая ломаная называется многоугольником?

6 Объясните, что такое луч. Как обозначаются лучи?

7 Какая фигура называется углом? Объясните, что такое вершина и стороны угла.

8 Какой угол называется развёрнутым?

9 Какие фигуры называются равными?

10 Объясните, как сравнить два отрезка.

11 Какая точка называется серединой отрезка?

12 Объясните, как сравнить два угла.

13 Какой луч называется биссектрисой угла?

14 Точка C делит отрезок AB на два отрезка. Как найти длину отрезка AB, если известны длины отрезков AC и CB?

15 Что такое длина ломаной?

16 Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник?

17 Объясните, как найти периметр многоугольника?

18 Какими инструментами пользуются для измерения расстояний?

19 Что такое градусная мера угла?

20 Луч OC делит угол AOB на два угла. Как найти градусную меру угла AOB, если известны градусные меры углов AOC и COB?

21 Какой угол называется острым; прямым; тупым?

22 Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов?

23 Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы?

24 Какие прямые называются перпендикулярными?

25 Объясните, почему две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются.

26 Какие приборы применяют для построения прямых углов на местности?

Дополнительные задачи

75 Отметьте четыре точки так, чтобы никакие три не лежали на одной прямой. Через каждую пару точек проведите прямую. Сколько получилось прямых?

76 Даны четыре прямые, каждые две из которых пересекаются. Сколько точек пересечения имеют эти прямые, если через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

77 Сколько неразвёрнутых углов образуется при пересечении трёх прямых, проходящих через одну точку?

78 Точка N лежит на отрезке MP. Расстояние между точками M и P равно 24 см, а расстояние между точками N и M в 2 раза больше расстояния между точками N и P. Найдите расстояние:

а) между точками N и P;

б) между точками N и M.

79 Три точки K, L, M лежат на одной прямой, $KL = 6$ см, $LM = 10$ см. Каким может быть расстояние KM? Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

80 Отрезок AB длины a разделён точками P и Q на три отрезка AP, PQ и QB так, что $AP = 2PQ = 2QB$. Найдите расстояние между:

а) точкой A и серединой отрезка QB;

б) серединами отрезков AP и QB.

81 Отрезок длины m разделён:

а) на три равные части;

б) на пять равных частей.

Найдите расстояние между серединами крайних частей.

82 Отрезок в 36 см разделён на четыре не равные друг другу части. Расстояние между серединами крайних частей равно 30 см. Найдите расстояние между серединами средних частей.

83* Точки A, B и C лежат на одной прямой, точки M и N — середины отрезков AB и AC. Докажите, что $BC = 2MN$.

84 Известно, что $\angle AOB = 35°$, $\angle BOC = 50°$. Найдите угол AOC. Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж с помощью линейки и транспортира.

85 Угол hk равен $120°$, а угол hm равен $150°$. Найдите угол km. Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

86 Найдите смежные углы, если:
а) один из них на $45°$ больше другого;
б) их разность равна $35°$.

87 Найдите угол, образованный биссектрисами двух смежных углов.

88 Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

89* Докажите, что если биссектрисы углов ABC и CBD перпендикулярны, то точки A, B и D лежат на одной прямой.

90 Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Через точку A проведены прямые m и n так, что $m \perp a$, $n \perp b$. Докажите, что прямые m и n не совпадают.

91 Найдите площадь и периметр прямоугольника, если прямоугольник сложили: а) из двух квадратов с периметрами 8 см; б) из трёх квадратов с периметрами 8 см; в) из четырёх квадратов с периметрами 8 см; г) из n (n — натуральное число, большее 1) квадратов с периметрами 8 см.

Глава II

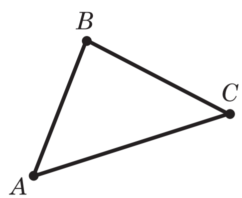
Треугольники

В этой главе вы начнёте изучение свойств треугольников и окружностей. Треугольник — одна из самых простых и вместе с тем самых важных фигур в геометрии. То же самое можно сказать об окружности. Оказывается, что эти простые фигуры таят в себе много интересного и неожиданного. Различные их свойства вы будете изучать на протяжении всего курса геометрии. При этом мы будем формулировать и доказывать теоремы. Что такое теорема и что значит доказать теорему, вы узнаете в данной главе, где появятся первые теоремы о треугольниках.

§1 Первый признак равенства треугольников

14. Треугольник

Многоугольник с тремя вершинами называется **треугольником**; он имеет три стороны. Треугольник является простейшим многоугольником. На рисунке 55 изображён треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA. Такой треугольник будем обозначать так: $\triangle ABC$ (читается: «треугольник ABC»). Этот же треугольник можно обозначить иначе, записав буквы A, B, C в другом порядке: $\triangle BCA$, $\triangle CBA$ и т. д.



Треугольник с вершинами A, B, C и сторонами AB, BC и CA

Рис. 55

Три угла — $\angle BAC$, $\angle CBA$ и $\angle ACB$ — называются **углами треугольника** ABC. Часто их обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Сумма длин трёх сторон треугольника называется его **периметром**.

Напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением. На рисунке 56 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

Каждый из этих треугольников можно наложить на другой так, что они полностью совместятся, т. е. попарно совместятся их вершины и стороны. Ясно, что при этом совместятся попарно и углы этих треугольников.

Таким образом, **если два треугольника равны, то элементы (т. е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника.**

Отметим, что **в равных треугольниках против соответственно равных сторон** (т. е. совмещающихся при наложении) **лежат равные углы, и обратно: против соответственно равных углов лежат равные стороны.** Так, например, в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, изображённых на рисунке 56, против соответственно равных сторон AB и A_1B_1 лежат равные углы C и C_1.

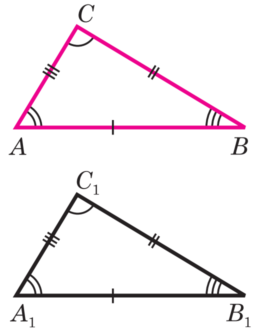


Рис. 56

Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Оказывается, что равенство двух треугольников можно установить, не накладывая один треугольник на другой, а сравнивая только некоторые их элементы. Как это сделать, мы обсудим в следующих пунктах.

Такая возможность — установить равенство двух фигур, не производя наложения одной на другую, а измеряя и сравнивая лишь некоторые элементы этих фигур, — важна для практики, например для сравнения двух земельных участков, которые, конечно, нельзя наложить друг на друга.

15. Первый признак равенства треугольников

В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путём рассуждений, называется **теоремой**, а сами рассуждения называются **доказательством теоремы**. Фактически мы уже имели дело с теоремами и их доказательствами. Так, утверждение о равенстве вертикальных углов является теоремой, а рассуждения, которые мы провели, чтобы установить равенство вертикальных углов, и есть доказательство этой теоремы. В этом параграфе мы докажем одну из теорем о равенстве треугольников.

Теорема

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы A и A_1 равны (рис. 57). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны.

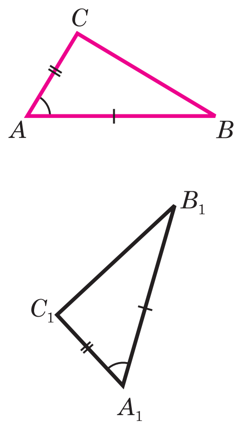


Рис. 57

Теорема доказана.

Доказанная теорема выражает **признак** (равенство у треугольников двух сторон и угла между ними), по которому можно сделать вывод о равенстве треугольников. Он называется **первым признаком равенства треугольников.**

Практические задания

92 Начертите треугольник и обозначьте его вершины буквами M, N и P. а) Назовите все углы и стороны треугольника; б) с помощью масштабной линейки измерьте стороны и найдите периметр треугольника.

93 Начертите треугольник DEF так, чтобы угол E был прямым. Назовите: а) стороны, лежащие против углов D, E, F; б) углы, лежащие против сторон DE, EF, FD; в) углы, прилежащие к сторонам DE, EF, FD.

94 С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC, в котором: а) $AB = 4{,}3$ см, $AC = 2{,}3$ см, $\angle A = 23°$; б) $BC = 9$ см, $BA = 6{,}2$ см, $\angle B = 122°$; в) $CA = 3$ см, $CB = 4$ см, $\angle C = 90°$.

Задачи

95 Сторона AB треугольника ABC равна 17 см, сторона AC вдвое больше стороны AB, а сторона BC на 10 см меньше стороны AC. Найдите периметр треугольника ABC.

96 Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 4,6 см.

97 Периметр одного треугольника больше периметра другого. Могут ли быть равными эти треугольники?

98 Отрезки AE и DC пересекаются в точке B, являющейся серединой каждого из них. а) Докажите, что треугольники ABC и EBD равны; б) найдите углы A и C треугольника ABC, если в треугольнике BDE $\angle D = 47°$, $\angle E = 42°$.

99 На рисунке 58 $AB = AC$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABD и ACD равны; б) найдите BD и AB, если $AC = 15$ см, $DC = 5$ см.

100 На рисунке 59 $BC = AD$, $\angle 1 = \angle 2$. а) Докажите, что треугольники ABC и CDA равны; б) найдите AB и BC, если $AD = 17$ см, $DC = 14$ см.

101 На рисунке 60 $OA = OD$, $OB = OC$, $\angle 1 = 74°$, $\angle 2 = 36°$. а) Докажите, что треугольники AOB и DOC равны; б) найдите угол ACD.

102 Отрезки AC и BD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

103 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки P и P_1 так, что $AP = A_1P_1$. Докажите, что $\triangle BPC = \triangle B_1P_1C_1$.

104 На сторонах угла CAD отмечены точки B и E так, что точка B лежит на отрезке AC, а точка E — на отрезке AD, причём $AC = AD$ и $AB = AE$. Докажите, что $\angle CBD = \angle DEC$.

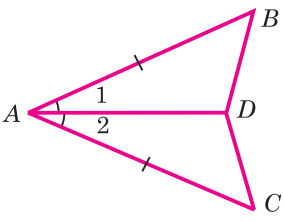


Рис. 58

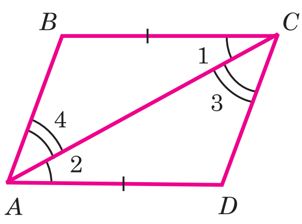


Рис. 59

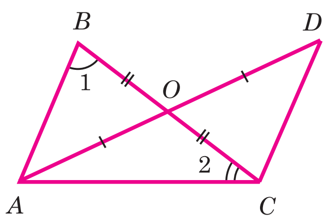
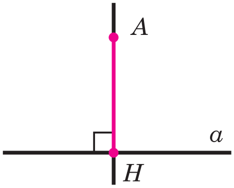


Рис. 60

§2 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

16. Перпендикуляр к прямой



Отрезок AH – перпендикуляр к прямой a

Рис. 61

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на этой прямой (рис. 61). Соединим точку A отрезком с точкой H прямой a. Отрезок AH называется **перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой a**, если прямые AH и a перпендикулярны. Точка H называется **основанием перпендикуляра**.

Теорема

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

Доказательство

Пусть A — точка, не лежащая на прямой BC (рис. 62, *а*). Докажем сначала, что из точки A можно провести перпендикуляр к прямой BC.

Проведём луч BA. Отложим от луча BC угол MBC, равный углу ABC, как показано на рисунке 62, *а*. Так как углы ABC и MBC равны, то первый из них можно наложить на второй так, что стороны BA и BC первого угла совместятся со сторонами BM и BC второго угла. Наглядно это наложение можно представить себе как перегибание рисунка по прямой BC. При этом точка A наложится на некоторую точку A_1 луча BM (рис. 62, *б*). Обозначим буквой H точку пересечения прямых AA_1 и BC.

Отрезок AH и есть искомый перпендикуляр к прямой BC. В самом деле, при указанном наложении луч HA совмещается с лучом HA_1, поэтому угол 1 совмещается с углом 2. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но углы 1 и 2 — смежные, значит, каждый из них прямой. Итак, $AH \perp BC$.

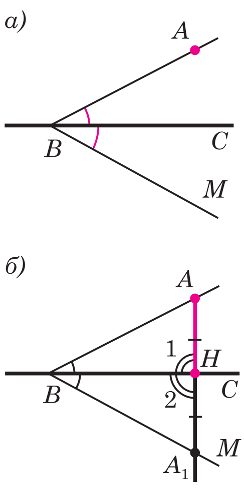


Рис. 62

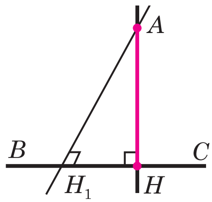


Рис. 63

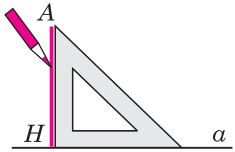
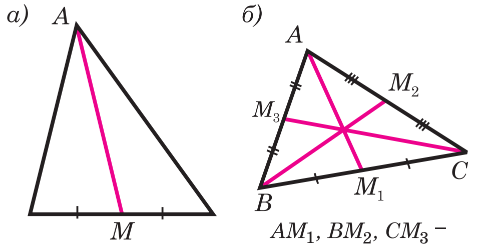


Рис. 64



AM – медиана треугольника

AM_1, BM_2, CM_3 – медианы треугольника ABC

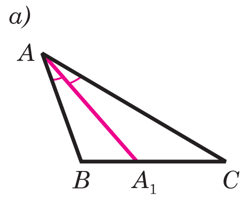
Рис. 65

Докажем, что из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC.

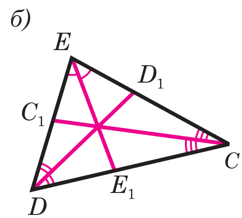
Если предположить, что через точку A можно провести ещё один перпендикуляр AH_1 к прямой BC, то получим, что две прямые AH и AH_1, перпендикулярные к прямой BC, пересекаются (рис. 63). Но в п. 12 было доказано, что это невозможно. Итак, из точки A можно провести только один перпендикуляр к прямой BC.

Теорема доказана.

Для проведения на чертеже перпендикуляра из точки к прямой используют чертёжный треугольник (рис. 64).



AA_1 – биссектриса треугольника ABC



CC_1, DD_1, EE_1 – биссектрисы треугольника CDE

Рис. 66

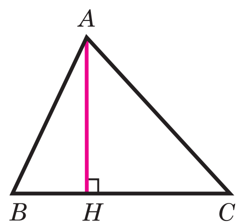
17. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой треугольника** (рис. 65, *а*).

Любой треугольник имеет три медианы. На рисунке 65, *б* отрезки AM_1, BM_2, CM_3 — медианы треугольника ABC.

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника** (рис. 66, *а*).

Любой треугольник имеет три биссектрисы. На рисунке 66, *б* отрезки CC_1, DD_1 и EE_1 — биссектрисы треугольника CDE.



AH – высота треугольника ABC

Рис. 67

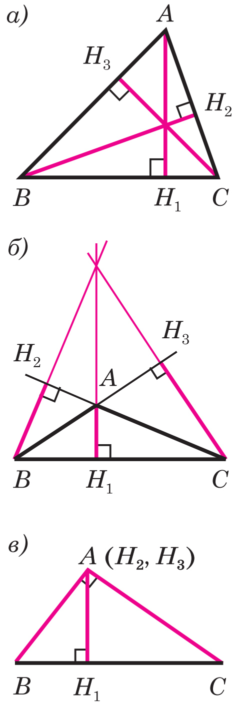
Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника** (рис. 67).

Любой треугольник имеет три высоты. На рисунках 68, *а*, *б*, *в* отрезки AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC.

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника обладают замечательными свойствами:

медианы треугольника пересекаются в одной точке (см. рис. 65, *б*);
биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (см. рис. 66, *б*);
высоты треугольника или их продолжения также пересекаются в одной точке (см. рис. 68, *а*, *б*, *в*).

Эти утверждения мы докажем позже.



AH_1, BH_2, CH_3 – *высоты* $\triangle ABC$

Рис. 68

18. Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. Равные стороны называются **боковыми сторонами**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника (рис. 69).

Треугольник, все стороны которого равны, называется **равносторонним** (рис. 70).

Равнобедренный треугольник

Рис. 69

Докажем две теоремы о свойствах равнобедренного треугольника.

Теорема

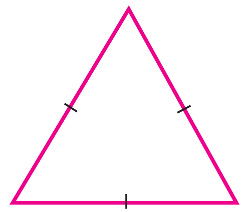
В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Доказательство

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием BC и докажем, что $\angle B = \angle C$.

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC (рис. 71). Треугольники ABD и ACD равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = AC$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, так как AD — биссектриса). В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle B = \angle C$.

Теорема доказана.



Равносторонний треугольник

Рис. 70

Теорема

В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

Доказательство

Обратимся снова к рисунку 71, на котором ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC, AD — его биссектриса.

Из равенства треугольников ABD и ACD следует, что $BD = DC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Равенство $BD = DC$ означает, что точка D — середина стороны BC, и поэтому AD — медиана треугольника ABC. Так как углы 3 и 4 — смежные и равны друг другу, то они прямые. Следовательно, отрезок AD является также высотой треугольника ABC.

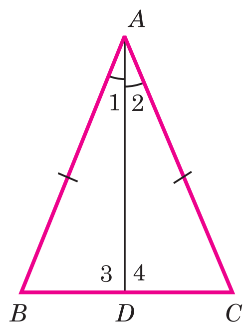


Рис. 71

Теорема доказана.

Мы установили, что биссектриса, медиана и высота равнобедренного треугольника, проведённые к основанию, совпадают. Поэтому справедливы также утверждения:

1. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и биссектрисой.

2. Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.

Практические задания

105 Начертите прямую a и отметьте точки A и B, лежащие по разные стороны от прямой a. С помощью чертёжного угольника проведите из этих точек перпендикуляры к прямой a.

106 Начертите треугольник. С помощью масштабной линейки отметьте середины сторон и проведите медианы треугольника.

107 Начертите треугольник. С помощью транспортира и линейки проведите его биссектрисы.

108 Начертите треугольник ABC с тремя острыми углами и треугольник MNP, у которого угол M тупой. С помощью чертёжного угольника проведите высоты каждого треугольника.

109 Начертите три равнобедренных треугольника так, чтобы угол, лежащий против основания, был:
а) острым; б) прямым; в) тупым.

Задачи

110 Точки A и C лежат по одну сторону от прямой a. Перпендикуляры AB и CD к прямой a равны.
а) Докажите, что $\angle ABD = \angle CDB$;
б) найдите $\angle ABC$, если $\angle ADB = 44°$.

111 Медиана AD треугольника ABC продолжена за точку D на отрезок DE, равный AD, и точка E соединена с точкой C.
а) Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ECD$;
б) найдите $\angle ACE$, если $\angle ACD = 56°$, $\angle ABD = 40°$.

112 В равнобедренном треугольнике основание в 2 раза меньше боковой стороны, а периметр равен 50 см. Найдите стороны треугольника.

113 Периметр равнобедренного треугольника ABC с основанием BC равен 40 см, а периметр равностороннего треугольника BCD равен 45 см. Найдите стороны AB и BC.

114 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AM. Найдите медиану AM, если периметр треугольника ABC равен 32 см, а периметр треугольника ABM равен 24 см.

115 Докажите, что если медиана треугольника является его высотой, то треугольник равнобедренный.

116 На рисунке 72 $CD = BD$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

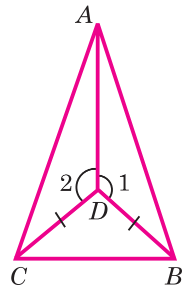


Рис. 72

117 На рисунке 73, *а* $AB = BC$, $\angle 1 = 130°$. Найдите $\angle 2$.

118 Точки M и P лежат по одну сторону от прямой b. Перпендикуляры MN и PQ, проведённые к прямой b, равны. Точка O — середина отрезка NQ.
а) Докажите, что $\angle OMP = \angle OPM$;
б) найдите $\angle NOM$, если $\angle MOP = 105°$.

119 Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к равным сторонам, равны.

120 Медиана AM треугольника ABC равна отрезку BM. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других углов.

121 Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.

122 На рисунке 73, *б* $AB = BC$, $CD = DE$. Докажите, что $\angle BAC = \angle CED$.

123 На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = CN$. Докажите, что:
а) $\triangle BAM = \triangle CAN$;
б) треугольник AMN равнобедренный.

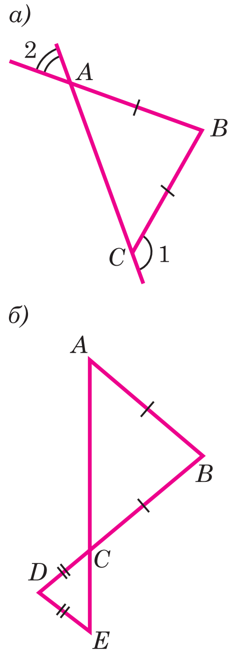


Рис. 73

124 В равнобедренном треугольнике DEK с основанием $DK = 16$ см отрезок EF — биссектриса, $\angle DEF = 43°$. Найдите KF, $\angle DEK$, $\angle EFD$.

125 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана BD. На сторонах AB и CB отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = CF$. Докажите, что: а) $\triangle BDE = \triangle BDF$; б) $\triangle ADE = \triangle CDF$.

§3 Второй и третий признаки равенства треугольников

19. Второй признак равенства треугольников

Теорема

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 74). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, сторона AB — с равной ей стороной A_1B_1, и вершины C и C_1 оказались по одну сторону от прямой A_1B_1.

Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то сторона AC наложится на луч A_1C_1, а сторона BC — на луч B_1C_1. Поэтому вершина C — общая точка сторон AC и BC — окажется лежащей как на луче A_1C_1, так и на луче B_1C_1 и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей — вершиной C_1. Значит, совместятся стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, поэтому они равны.

Теорема доказана.

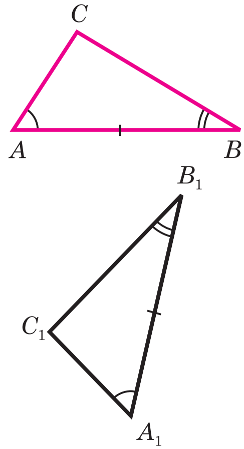


Рис. 74

20. Третий признак равенства треугольников

Теорема

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 75). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Приложим треугольник ABC к треугольнику $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B — с вершиной B_1, а вершины C и C_1 оказались по разные стороны от прямой A_1B_1 (рис. 76).

Возможны три случая: луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (рис. 76, *а*); луч C_1C совпада-

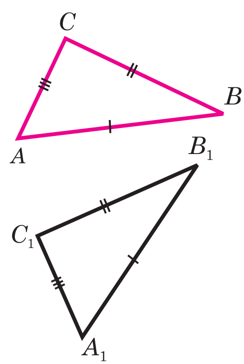


Рис. 75

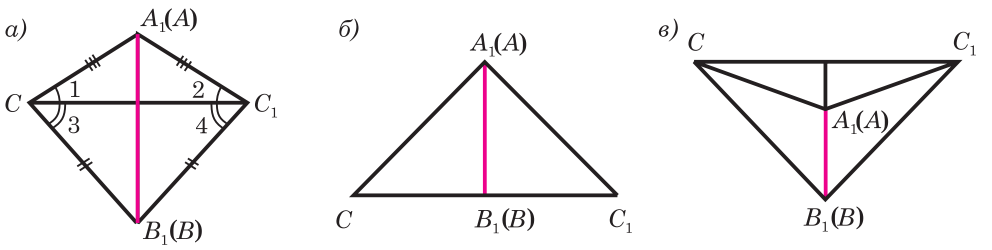


Рис. 76

ет с одной из сторон этого угла (рис. 76, *б*); луч C_1C проходит вне угла $A_1C_1B_1$ (рис. 76, *в*). Рассмотрим первый случай (остальные случаи рассмотрите самостоятельно).

Так как по условию теоремы стороны AC и A_1C_1, BC и B_1C_1 равны, то треугольники A_1C_1C и B_1C_1C — равнобедренные (см. рис. 76, *а*). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$. Итак, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. **Теорема доказана.**

Из третьего признака равенства треугольников следует, что **треугольник — жёсткая фигура**. Поясним, что это означает.

Представим себе две рейки, у которых два конца скреплены гвоздём (рис. 77, *а*). Такая конструкция не является жёсткой: сдвигая или раздвигая свободные концы реек, мы можем менять угол между ними. Теперь возьмём ещё одну рейку и скрепим её концы со свободными концами первых двух реек (рис. 77, *б*).

Полученная конструкция — треугольник — будет уже жёсткой. В ней нельзя сдвинуть или раздвинуть никакие две стороны, т. е. нельзя изменить ни один угол. Действительно, если бы это удалось, то мы получили бы новый треугольник, не равный исходному. Но это невозможно, так как новый треугольник должен быть равен

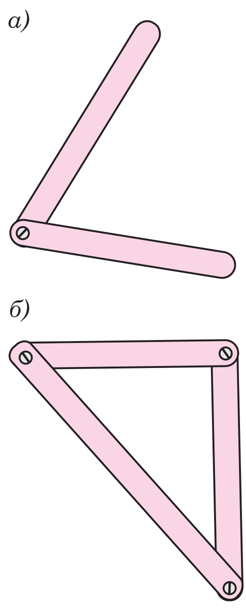
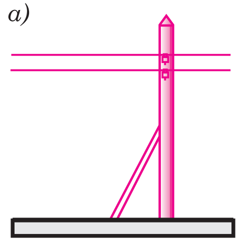


Рис. 77

исходному по третьему признаку равенства треугольников.

Это свойство — жёсткость треугольника — широко используется на практике. Так, чтобы закрепить столб в вертикальном положении, к нему ставят подпорку (рис. 78, *а*); такой же принцип используется при установке кронштейна (рис. 78, *б*).

а)



б)

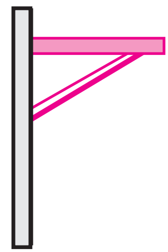


Рис. 78

Задачи

126 Отрезки AB и CD пересекаются в середине отрезка AB, точке O, $\angle OAD = \angle OBC$.
а) Докажите, что $\triangle CBO = \triangle DAO$;
б) найдите BC и CO, если $CD = 26$ см, $AD = 15$ см.

127 На рисунке 59 (см. с. 32) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
а) Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$;
б) найдите AB и BC, если $AD = 19$ см, $CD = 11$ см.

128 На биссектрисе угла A взята точка D, а на сторонах этого угла — точки B и C такие, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $BD = CD$.

129 По данным рисунка 79 докажите, что $OP = OT$, $\angle P = \angle T$.

130 На рисунке 80 $\angle DAC = \angle DBC$, $AO = BO$. Докажите, что $\angle C = \angle D$ и $AC = BD$.

131 На рисунке 80 $\angle DAB = \angle CBA$, $\angle CAB = \angle DBA$, $AC = 13$ см. Найдите BD.

132 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AB и A_1B_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

133 Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы, проведённые к соответственно равным сторонам, равны.

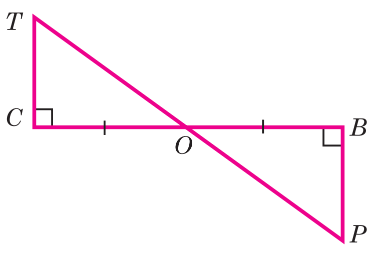


Рис. 79

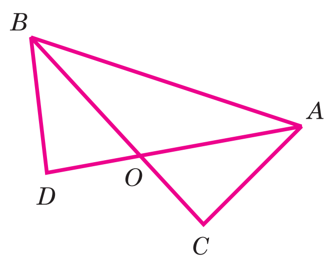


Рис. 80

134 Отрезки AC и BD пересекаются в середине отрезка AC, точке O, $\angle BCO = \angle DAO$. Докажите, что $\triangle BOA = \triangle DOC$.

135 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CO и C_1O_1 — медианы, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что:
а) $\triangle ACO = \triangle A_1C_1O_1$;
б) $\triangle BCO = \triangle B_1C_1O_1$.

136 В треугольниках DEF и MNP $EF = NP$, $DF = MP$ и $\angle F = \angle P$. Биссектрисы углов E и D пересекаются в точке O, а биссектрисы углов M и N — в точке K. Докажите, что $\angle DOE = \angle MKN$.

137 Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, пересекает стороны угла в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN — равнобедренный.

138 Докажите, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник — равнобедренный.

139 Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника.

140 Докажите, что если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны.

141 В треугольниках ABD и ACD $AB = AC$, $BD = DC$, точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD. Найдите угол CAD, если $\angle BAC = 50°$.

142 В треугольниках ABC и ADC $BC = AD$, $AB = CD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$. Рассмотрите разные случаи расположения точек B и D.

143 На рисунке 81 $AB = CD$ и $BD = AC$. Докажите, что: а) $\angle CAD = \angle ADB$; б) $\angle BAC = \angle CDB$.

144 На рисунке 82 $AB = CD$, $AD = BC$, BE — биссектриса угла ABC, а DF — биссектриса угла ADC. Докажите, что:
а) $\angle ABE = \angle ADF$;
б) $\triangle ABE = \triangle CDF$.

145 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы BM и B_1M_1 равны, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

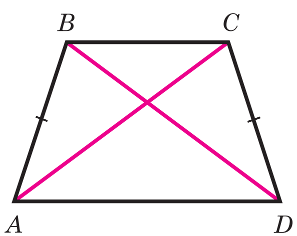


Рис. 81

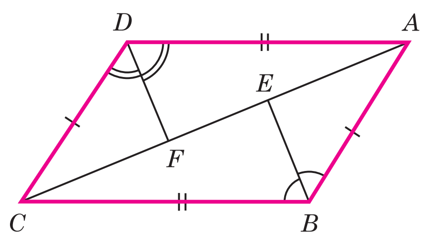


Рис. 82

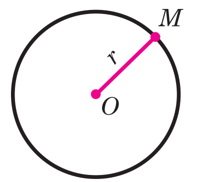
146 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ и $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

147 Равнобедренные треугольники ADC и BCD имеют общее основание DC. Прямая AB пересекает отрезок CD в точке O. Докажите, что: а) $\angle ADB = \angle ACB$; б) $DO = OC$.

§4 Задачи на построение

21. Окружность

Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется **определением.** Мы уже встречались с определениями, например с определением угла, смежных углов, равнобедренного треугольника и т. д. Дадим определение ещё одной геометрической фигуры — окружности.

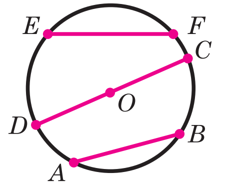


Окружность радиуса r с центром O

Рис. 83

Определение

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.



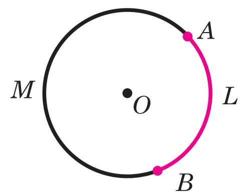
AB и EF – хорды, CD – диаметр

Рис. 84

Данная точка называется **центром** окружности, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, — **радиусом** окружности (рис. 83). Из определения окружности следует, что все радиусы имеют одну и ту же длину.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется её **хордой.** Хорда, проходящая через центр окружности, называется её **диаметром.**

На рисунке 84 отрезки AB и EF — хорды окружности, отрезок CD — диаметр окружности. Очевидно, диаметр окружности в 2 раза больше её радиуса. Центр окружности является серединой любого диаметра.



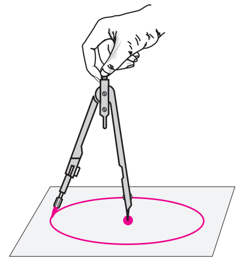
ALB и AMB – дуги окружности, ограниченные точками A и B

Рис. 85

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется **дугой** окружности. На рисунке 85 ALB и AMB — дуги, ограниченные точками A и B.

Для изображения окружности на чертеже пользуются **циркулем** (рис. 86). Чтобы провести окружность на местности, можно воспользоваться верёвкой (рис. 87).

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом** (рис. 88).



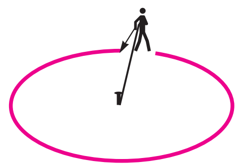
Построение окружности с помощью циркуля

Рис. 86

22. Построения циркулем и линейкой

Мы уже имели дело с геометрическими построениями: проводили прямые, откладывали отрезки, равные данным, чертили углы, треугольники и другие фигуры. При этом мы пользовались масштабной линейкой, циркулем, транспортиром, чертёжным угольником.

Оказывается, что многие построения можно выполнить с помощью только циркуля и линейки без масштабных делений. Поэтому в геометрии специально выделяют те задачи на построение, которые решаются с помощью только этих двух инструментов.



Построение окружности с помощью верёвки

Рис. 87

Что можно делать с их помощью? Ясно, что **линейка позволяет провести произвольную прямую, а также построить прямую, проходящую через две данные точки. С помощью циркуля можно провести окружность произвольного радиуса, а также окружность с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку.** Выполняя эти несложные операции, мы сможем решить много интересных задач на построение:

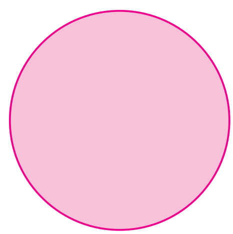
— построить угол, равный данному;

— через данную точку провести прямую, перпендикулярную к данной прямой;

— разделить данный отрезок пополам

и другие задачи.

Начнём с простой задачи.



Круг

Рис. 88

Задача

На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.

Решение

Изобразим фигуры, данные в условии задачи: луч OC и отрезок AB (рис. 89, *а*). Затем циркулем построим окружность радиуса AB с центром O (рис. 89, *б*). Эта окружность пересечёт луч OC в некоторой точке D. Отрезок OD — искомый.

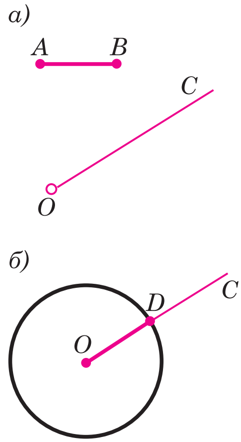


Рис. 89

23. Примеры задач на построение

Построение угла, равного данному

Задача

Отложить от данного луча угол, равный данному.

Решение

Данный угол с вершиной A и луч OM изображены на рисунке 90. Требуется построить угол, равный углу A, так, чтобы одна из его сторон совпала с лучом OM.

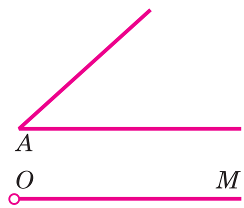


Рис. 90

Проведём окружность произвольного радиуса с центром в вершине A данного угла. Эта окружность пересекает стороны угла в точках B и C (рис. 91, *а*). Затем проведём окружность того же радиуса с центром в начале данного луча OM. Она пересекает луч в точке D (рис. 91, *б*). После этого построим окружность с центром D, радиус которой равен BC. Окружности с центрами O и D пересекаются в двух точках. Одну из этих точек обозначим буквой E. Докажем, что угол MOE — искомый.

Рассмотрим треугольники ABC и ODE. Отрезки AB и AC являются радиусами окружности с центром A, а отрезки OD и OE — радиусами окружности с центром O (см. рис. 91, *б*). Так как по построению эти окружности имеют равные радиусы, то $AB = OD$, $AC = OE$. Также по построению $BC = DE$.

Следовательно, $\triangle ABC = \triangle ODE$ по трём сторонам. Поэтому $\angle DOE = \angle BAC$, т. е. построенный угол MOE равен данному углу A.

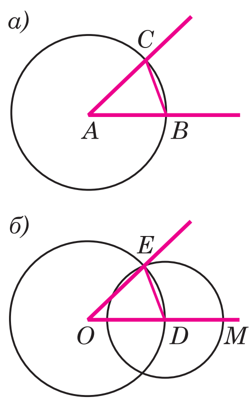


Рис. 91

То же построение можно выполнить и на местности, если вместо циркуля воспользоваться верёвкой.

Построение биссектрисы угла

Задача

Построить биссектрису данного угла.

Решение

Данный угол KAM изображён на рисунке 92. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в вершине A. Она пересечёт стороны угла в точках B и C.

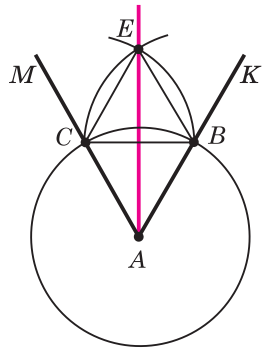


Рис. 92

Затем проведём две окружности одинакового радиуса BC с центрами в точках B и C (на рисунке изображены лишь части этих окружностей). Они пересекутся в двух точках, из которых хотя бы одна лежит внутри угла. Обозначим её буквой E. Докажем, что луч AE является биссектрисой данного угла KAM.

Рассмотрим треугольники ACE и ABE. Они равны по трём сторонам. В самом деле, AE — общая сторона; AC и AB равны как радиусы одной и той же окружности; $CE = BE$ по построению.

Из равенства треугольников ACE и ABE следует, что $\angle CAE = \angle BAE$, т. е. луч AE — биссектриса данного угла KAM.

Замечание

Можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на два равных угла? Ясно, что можно, — для этого нужно провести биссектрису этого угла.

А можно ли с помощью циркуля и линейки разделить данный угол на три равных угла? Эта задача, получившая название **задачи о трисекции угла**, в течение многих веков привлекала внимание математиков. Лишь в XIX в. было доказано, что для произвольного угла такое построение невозможно.

Построение перпендикулярных прямых

Задача

Даны прямая и точка на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.

Решение

Данная прямая a и данная точка M, принадлежащая этой прямой, изображены на рисунке 93.

На лучах прямой a, исходящих из точки M, отложим равные отрезки MA и MB. Затем построим две окружности с центрами A и B радиуса AB. Они пересекаются в двух точках: P и Q.

Проведём прямую через точку M и одну из этих точек, например прямую MP (см. рис. 93), и докажем, что эта прямая — искомая, т. е. что она перпендикулярна к данной прямой a.

В самом деле, так как медиана PM равнобедренного треугольника PAB является также высотой, то $PM \perp a$.

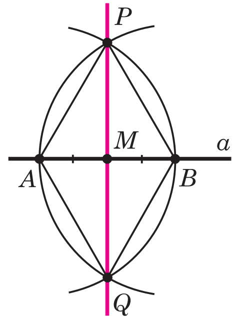


Рис. 93

Построение середины отрезка

Задача

Построить середину данного отрезка.

Решение

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами A и B радиуса AB (рис. 94). Они пересекаются в точках P и Q. Проведём прямую PQ. Точка O пересечения этой прямой с отрезком AB и есть искомая середина отрезка AB (рис. 95).

В самом деле, $\triangle APQ = \triangle BPQ$ по трём сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, и, следовательно, отрезок PO — биссектриса равнобедренного треугольника APB, а значит, высота и медиана, т. е. $PO \perp AB$ и точка O — середина отрезка AB.

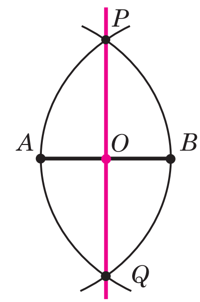


Рис. 94

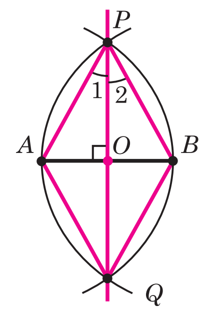


Рис. 95

Замечание

Прямая PQ, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная к нему, называется **серединным перпендикуляром к отрезку** AB.

Задачи

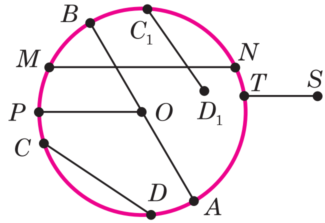


Рис. 96

148 Какие из отрезков, изображённых на рисунке 96, являются: а) хордами окружности; б) диаметром окружности; в) радиусами окружности? (Точка O — центр окружности.)

149 Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите свойства хорд: а) хорды BD и AC равны; б) хорды AD и BC равны; в) $\angle BAD = \angle BCD$.

150 Отрезок MK — диаметр окружности с центром O, а MP и PK — равные хорды этой окружности. Найдите угол POM.

151 Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что $CB = 13$ см, $AB = 16$ см.

152 На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что угол AOB — прямой. Отрезок BC — диаметр окружности. Докажите, что хорды AB и AC равны.

153 На прямой даны две точки A и B. На продолжении луча BA отложите отрезок BC так, чтобы $BC = 2AB$.

154 Даны прямая a, точка B, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на прямой a так, чтобы $BM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

155 Даны окружность, точка A, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на окружности так, чтобы $AM = PQ$. Всегда ли задача имеет решение?

156 Даны острый угол BAC и луч XY. Постройте угол YXZ так, чтобы $\angle YXZ = 2\angle BAC$.

157 Дан тупой угол AOB. Постройте луч OX так, чтобы углы XOA и XOB были равными тупыми углами.

158 Даны прямая a и точка M, не лежащая на ней. Постройте прямую, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a.

Решение

Построим окружность с центром в данной точке M, пересекающую данную прямую a в двух точках, которые обозначим буквами A и B (рис. 97). Затем построим две окружности с центрами A и B, проходящие через точку M. Эти окружности пересекаются в точке M и ещё в одной точке, которую

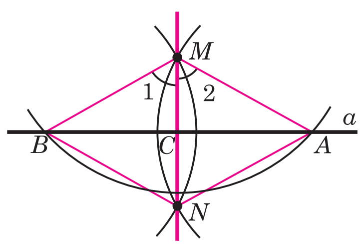


Рис. 97

обозначим буквой N. Проведём прямую MN и докажем, что эта прямая — искомая, т. е. она перпендикулярна к прямой a. В самом деле, треугольники AMN и BMN равны по трём сторонам, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что отрезок MC (C — точка пересечения прямых a и MN) является биссектрисой равнобедренного треугольника AMB, а значит, и высотой. Таким образом, $MN \perp AB$, т. е. $MN \perp a$.

159 Дан треугольник ABC. Постройте: а) биссектрису AK; б) медиану BM; в) высоту CH треугольника.

160 С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) $45°$; б) $22°30'$.

Вопросы для повторения к главе II

1 Объясните, какая фигура называется треугольником. Начертите треугольник и покажите его стороны, вершины и углы. Что такое периметр треугольника?

2 Какие треугольники называются равными?

3 Что такое теорема и доказательство теоремы?

4 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак равенства треугольников.

5 Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной прямой.

6 Сформулируйте и докажите теорему о перпендикуляре, проведённом из данной точки к данной прямой.

7 Какой отрезок называется медианой треугольника? Сколько медиан имеет треугольник?

8 Какой отрезок называется биссектрисой треугольника? Сколько биссектрис имеет треугольник?

9 Какой отрезок называется высотой треугольника? Сколько высот имеет треугольник?

10 Какой треугольник называется равнобедренным? Как называются его стороны?

11 Какой треугольник называется равносторонним?

12 Докажите, что углы при основании равнобедренного треугольника равны.

13 Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника.

14 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак равенства треугольников.

15 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак равенства треугольников.

16 Что такое определение? Дайте определение окружности. Что такое центр, радиус, хорда и диаметр окружности?

17 Объясните, как отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному.

18 Объясните, как отложить от данного луча угол, равный данному.

19 Объясните, как построить биссектрису данного угла.

20 Объясните, как построить прямую, проходящую через данную точку, лежащую на данной прямой, и перпендикулярную к этой прямой.

21 Объясните, как построить середину данного отрезка.

Дополнительные задачи

161 Периметр треугольника ABC равен 15 см. Сторона BC больше стороны AB на 2 см, а сторона AB меньше стороны AC на 1 см. Найдите стороны треугольника.

162 В равнобедренном треугольнике основание больше боковой стороны на 2 см, но меньше суммы боковых сторон на 3 см. Найдите стороны треугольника.

163 Основание равнобедренного треугольника равно 8 см. Медиана, проведённая к боковой стороне, разбивает треугольник на два треугольника так, что периметр одного треугольника на 2 см больше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника.

164 Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и угол, противолежащий основанию, одного треугольника соответственно равны боковой стороне и углу, противолежащему основанию, другого треугольника.

165 Прямая a проходит через середину отрезка AB и перпендикулярна к нему. Докажите, что: а) каждая точка прямой a равноудалена от точек A и B; б) каждая точка, равноудалённая от точек A и B, лежит на прямой a.

166 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы AM и A_1M_1 равны, $BC = B_1C_1$ и $\angle AMB = \angle A_1M_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

167 На рисунке 98 треугольник ADE равнобедренный, DE — основание. Докажите, что: а) если $BD = CE$, то $\angle CAD = \angle BAE$ и $AB = AC$; б) если $\angle CAD = \angle BAE$, то $BD = CE$ и $AB = AC$.

168 Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

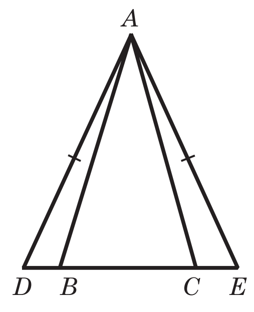


Рис. 98

169 На сторонах равностороннего треугольника ABC отложены равные отрезки AD, BE и CF, как показано на рисунке 99. Точки D, E, F соединены отрезками. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

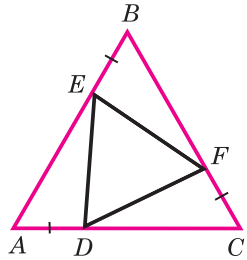


Рис. 99

170 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O. На отрезках AC и BD отмечены точки K и K_1 так, что $AK = BK_1$. Докажите, что: а) $OK = OK_1$; б) точка O лежит на прямой KK_1.

171 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине O, точки M и N — середины отрезков AC и BD. Докажите, что точка O — середина отрезка MN.

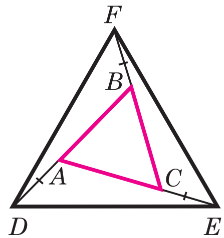


Рис. 100

172 Стороны равностороннего треугольника ABC продолжены, как показано на рисунке 100, на равные отрезки AD, CE, BF. Докажите, что треугольник DEF — равносторонний.

173 В треугольнике ABC $\angle A = 38°$, $\angle B = 110°$, $\angle C = 32°$. На стороне AC отмечены точки D и E так, что точка D лежит на отрезке AE, $BD = DA$, $BE = EC$. Найдите угол DBE.

174 На рисунке 101 $OC = OD$, $OB = OE$. Докажите, что $AB = EF$. Объясните способ измерения ширины озера (отрезка AB на рисунке 101), основанный на этой задаче.

175 Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AD = A_1D_1$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

176 В треугольниках ABC и ADC стороны BC и AD равны и пересекаются в точке O, $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что треугольники ABO и CDO равны.

177 На рисунке 102 $AC = AD$, $AB \perp CD$. Докажите, что $BC = BD$ и $\angle ACB = \angle ADB$.

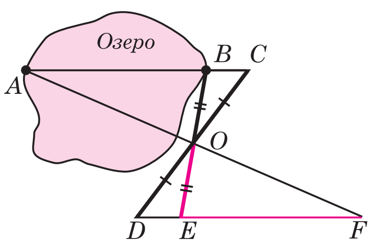


Рис. 101

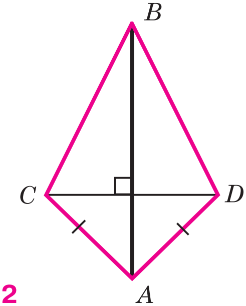


Рис. 102

178* Докажите, что угол, смежный с углом треугольника, больше каждого из двух других углов треугольника.

179* Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $BC = B_1C_1$.

180* На сторонах угла XOY отмечены точки A, B, C и D так, что $OA = OB$, $AC = BD$ (рис. 103). Прямые AD и BC пересекаются в точке E. Докажите, что луч OE — биссектриса угла XOY. Опишите способ построения биссектрисы угла, основанный на этом факте.

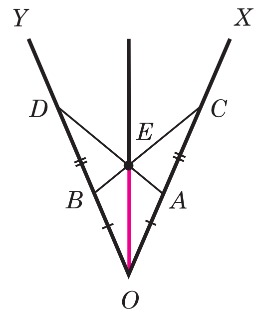


Рис. 103

181* При решении геометрических задач часто используют дополнительные построения. Одно из таких построений связано с ***методом удвоения медианы***: если AM — медиана треугольника ABC, то строится отрезок AK такой, что точка M является его серединой. Докажите с помощью метода удвоения медианы, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников.

182* Даны два треугольника: ABC и $A_1B_1C_1$. Известно, что $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и L, а на сторонах A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — точки K_1 и L_1 так, что $AK = A_1K_1$, $LC = L_1C_1$. Докажите, что: а) $KL = K_1L_1$; б) $AL = A_1L_1$.

183* Даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка D, не лежащая на этой прямой. Докажите, что по крайней мере два из трёх отрезков AD, BD и CD не равны друг другу.

184* На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки P и Q так, что $\angle PXB = \angle QXC$, где X — середина основания BC. Докажите, что $BQ = CP$.

185 Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, с центром на данной прямой.

186 Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

187 Даны прямая a, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на прямой a и $AC = PQ$.

188 Даны окружность, точки A, B и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы вершина C лежала на данной окружности и $AC = PQ$.

189 На стороне BC треугольника ABC постройте точку, равноудалённую от вершин A и C.

190 С помощью циркуля и линейки разделите данный отрезок на четыре равные части.

Глава III

Параллельные прямые

Эта глава посвящена изучению параллельных прямых. Так называются две прямые на плоскости, которые не пересекаются. Отрезки параллельных прямых мы видим в окружающей обстановке — это два края прямоугольного стола, два края обложки книги, две штанги троллейбуса и т. д. Параллельные прямые играют в геометрии очень важную роль. В этой главе вы узнаете о том, что такое аксиомы геометрии и в чём состоит аксиома параллельных прямых — одна из самых известных аксиом геометрии.

§1 Признаки параллельности двух прямых

24. Определение параллельных прямых

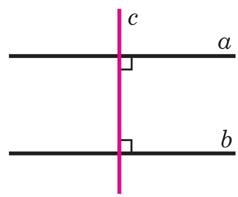


Рис. 104

В п. 1 мы отмечали, что две прямые либо имеют одну общую точку, т. е. пересекаются, либо не имеют ни одной общей точки, т. е. не пересекаются.

Определение

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначают так: $a \parallel b$.

На рисунке 104 изображены прямые a и b, перпендикулярные к прямой c. В п. 12 мы установили, что такие прямые a и b не пересекаются, т. е. они параллельны.

Наряду с параллельными прямыми часто рассматривают параллельные отрезки. Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. На рисунке 105, *а* отрезки AB и CD параллельны ($AB \parallel CD$), а отрезки MN и CD не

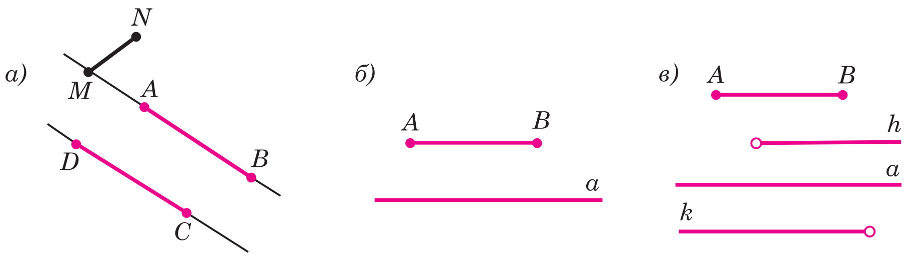


Рис. 105

параллельны. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой (рис. 105, *б*), луча и прямой, отрезка и луча, двух лучей (рис. 105, *в*).

25. Признаки параллельности двух прямых

Прямая c называется **секущей** по отношению к прямым a и b, если она пересекает их в двух точках (рис. 106). При пересечении прямых a и b секущей c образуется восемь неразвёрнутых углов, которые на рисунке 106 обозначены цифрами. Некоторые пары этих углов имеют специальные названия:

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6;

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6;

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7.

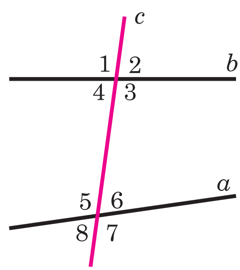


Рис. 106

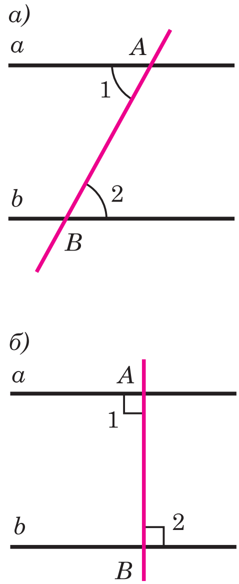
Рассмотрим три признака параллельности двух прямых, связанные с этими парами углов.

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 107, *а*).



Докажем, что $a \parallel b$. Если углы 1 и 2 прямые (рис. 107, *б*), то прямые a и b перпендикулярны к прямой AB и, следовательно, параллельны.

Рассмотрим случай, когда углы 1 и 2 не прямые.

Из середины отрезка AB, точки O, проведём перпендикуляр OH к прямой a (рис. 107, *в*). На прямой b от точки B отложим отрезок BH_1, равный отрезку AH, как показано на рисунке 107, *в*, и проведём отрезок OH_1. Треугольники OHA и OH_1B равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$. Из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что точка H_1 лежит на продолжении луча OH, т. е. точки H, O и H_1 лежат на одной прямой, а из равенства $\angle 5 = \angle 6$ следует, что угол 6 — прямой (так как угол 5 — прямой). Итак, прямые a и b перпендикулярны к прямой HH_1, поэтому они параллельны.

Теорема доказана.

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

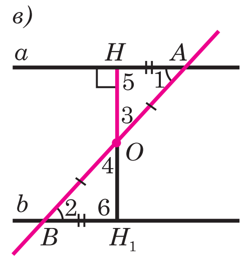


Рис. 107

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c соответственные углы равны, например $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 108).

Так как углы 2 и 3 — вертикальные, то $\angle 2 = \angle 3$. Из этих двух равенств следует, что $\angle 1 = \angle 3$. Но углы 1 и 3 — накрест лежащие, поэтому прямые a и b параллельны.

Теорема доказана.

Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей c сумма односторонних углов равна 180°, например $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (см. рис. 108).

Так как углы 3 и 4 — смежные, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Из этих двух равенств следует, что накрест лежащие углы 1 и 3 равны, поэтому прямые a и b параллельны.

Теорема доказана.

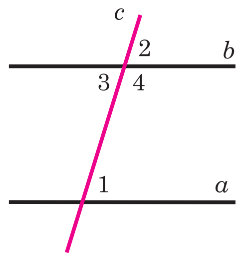


Рис. 108

26. Практические способы построения параллельных прямых

Признаки параллельности прямых лежат в основе способов построения параллельных прямых с помощью различных инструментов, используемых на практике. Рассмотрим, например, способ построения параллельных прямых с помощью чертёжного треугольника и линейки.

Чтобы построить прямую, проходящую через точку M и параллельную данной прямой a, приложим чертёжный треугольник к прямой a, а к нему линейку так, как показано на рисунке 109. Затем, передвигая треугольник вдоль линейки, добьёмся того, чтобы точка M оказалась на стороне этого треугольника, и проведём прямую b. Прямые a и b параллельны, так как соответственные углы, обозначенные на рисунке 109 буквами α и β, равны.

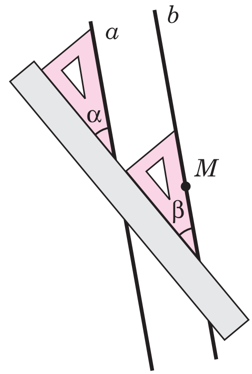
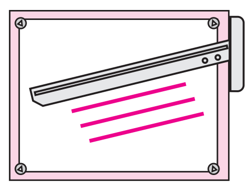


Рис. 109

На рисунке 110, *а* показан способ построения параллельных прямых при помощи **рейсшины**. Этим способом пользуются в чертёжной практике.

Аналогичный способ применяется при выполнении столярных работ, где для разметки параллельных прямых используется **малка** (две деревянные планки, скреплённые шарниром, рис. 110, *б*).

а)



б)

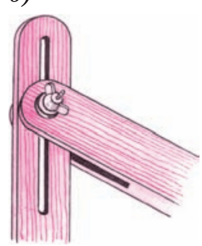


Рис. 110

Задачи

191 На рисунке 111 прямые a и b пересечены прямой c. Докажите, что $a \parallel b$, если:
а) $\angle 1 = 37°$, $\angle 7 = 143°$;
б) $\angle 1 = \angle 6$;
в) $\angle 1 = 45°$, а угол 7 в 3 раза больше угла 3.

192 По данным рисунка 112 докажите, что $AB \parallel DE$.

193 Отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

194 Используя данные рисунка 113, докажите, что $BC \parallel AD$.

195 На рисунке 114 $AB = BC$, $AD = DE$, $\angle C = 70°$, $\angle EAC = 35°$. Докажите, что $DE \parallel AC$.

196 Отрезок BK — биссектриса треугольника ABC. Через точку K проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке M так, что $BM = MK$. Докажите, что прямые KM и AB параллельны.

197 В треугольнике ABC угол A равен 40°, а угол BCE, смежный с углом ACB, равен 80°. Докажите, что биссектриса угла BCE параллельна прямой AB.

198 В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$. Через вершину B проведена прямая BD так, что луч BC — биссектриса угла ABD. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

199 Начертите треугольник. Через каждую вершину этого треугольника с помощью чертёжного угольника и линейки проведите прямую, параллельную противоположной стороне.

200 Начертите треугольник ABC и отметьте точку D на стороне AC. Через точку D с помощью чертёжного треугольника и линейки проведите прямые, параллельные двум другим сторонам треугольника.

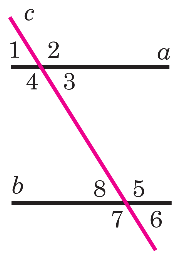


Рис. 111

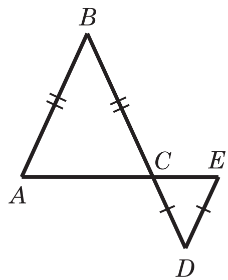


Рис. 112

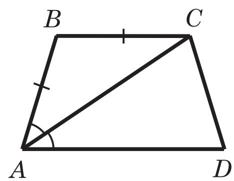


Рис. 113

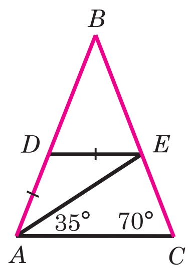


Рис. 114

§2 Аксиома параллельных прямых

27. Об аксиомах геометрии

Изучая свойства геометрических фигур, мы доказали ряд теорем. При этом мы опирались, как правило, на доказанные ранее теоремы. А на чём основаны доказательства самых первых теорем геометрии? Ответ на этот вопрос такой: некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и вообще строится вся геометрия. Такие исходные положения называются **аксиомами**.

Некоторые аксиомы были сформулированы ещё в первой главе (хотя они и не назывались там аксиомами). Например, аксиомой является утверждение о том, что

через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Многие другие аксиомы, хотя и не были выделены особо, но фактически использовались в наших рассуждениях. Так, сравнение двух отрезков мы проводили с помощью наложения одного отрезка на другой. Возможность такого наложения вытекает из следующей аксиомы:

на любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

Сравнение двух углов основано на аналогичной аксиоме:

от любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.

Все эти аксиомы являются наглядно очевидными и не вызывают сомнений. Само слово «аксиома» происходит от греческого «аксиос», что означает «ценный, достойный». Полный список аксиом планиметрии, принятых в нашем курсе геометрии, мы приводим в конце учебника.

Такой подход к построению геометрии, когда сначала формулируются исходные положения — аксиомы, а затем на их основе путём логических рассуждений доказываются другие утверждения, зародился ещё в глубокой древности и был изложен в знаменитом сочинении «Начала» древнегреческого учёного Евклида. Некоторые из аксиом Евклида (часть из них он называл **постулатами**) и сейчас используются в курсах геометрии, а сама геометрия, изложенная в «Началах», называется **евклидовой геометрией**. В следующем пункте мы познакомимся с одной из самых известных аксиом геометрии.

Евклид (III в. до н. э.)

28. Аксиома параллельных прямых

Рассмотрим произвольную прямую a и точку M, не лежащую на ней (рис. 115, *а*). Докажем, что через точку M можно провести прямую, параллельную прямой a. Для этого проведём через точку M две прямые: сначала прямую c перпендикулярно к прямой a, а затем прямую b перпендикулярно к прямой c (рис. 115, *б*). Так как прямые a и b перпендикулярны к прямой c, то они параллельны.

Итак, через точку M проходит прямая b, параллельная прямой a. Возникает следующий вопрос: можно ли через точку M провести ещё одну прямую, параллельную прямой a?

Нам представляется, что если прямую b «повернуть» даже на очень малый угол вокруг точки M, то она пересечёт прямую a (прямая b' на рисунке 115, *б*). Иными словами, нам кажется, что через точку M нельзя провести другую прямую (отличную от b), параллельную прямой a. А можно ли это утверждение доказать?

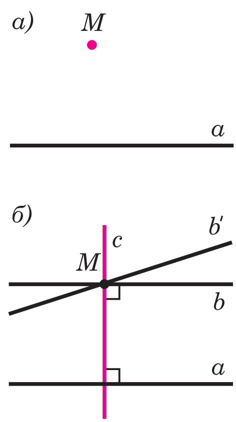


Рис. 115

Параллельные прямые

Этот вопрос имеет большую историю. В «Началах» Евклида содержится постулат (пятый постулат Евклида), из которого следует, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной. Многие математики начиная с древних времён предпринимали попытки доказать пятый постулат Евклида, т. е. вывести его из других аксиом. Однако эти попытки каждый раз оказывались неудачными. И лишь в XIX в. было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных аксиом Евклида, а само является аксиомой.

Н. И. Лобачевский (1792—1856)

Огромную роль в решении этого непростого вопроса сыграл великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Итак, в качестве ещё одного из исходных положений мы принимаем **аксиому параллельных прямых.**

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Утверждения, которые выводятся непосредственно из аксиом или теорем, называются **следствиями**. Например, утверждения 1 и 2 (см. с. 36) являются следствиями из теоремы о биссектрисе равнобедренного треугольника.

Рассмотрим некоторые следствия из аксиомы параллельных прямых.

1⁰. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

Действительно, пусть прямые a и b параллельны и прямая c пересекает прямую a в точке M (рис. 116, a). Докажем, что прямая c пересекает и прямую b. Если бы прямая c не пе-

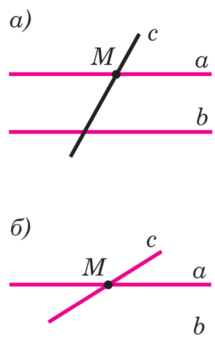


Рис. 116

ресекала прямую b, то через точку M проходили бы две прямые (прямые a и c), параллельные прямой b (рис. 116, *б*). Но это противоречит аксиоме параллельных прямых, и, значит, прямая c пересекает прямую b.

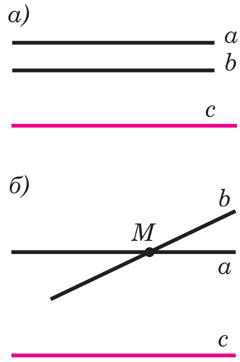


Рис. 117

2^0. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Действительно, пусть прямые a и b параллельны прямой c (рис. 117, *а*). Докажем, что $a \parallel b$. Допустим, что прямые a и b не параллельны, т. е. пересекаются в некоторой точке M (рис. 117, *б*). Тогда через точку M проходят две прямые (прямые a и b), параллельные прямой c.

Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Поэтому наше предположение неверно, а значит, прямые a и b параллельны.

29. Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

Во всякой теореме различают две части: **условие** и **заключение**. Условие теоремы — это то, что дано, а заключение — то, что требуется доказать.

Рассмотрим, например, теорему, выражающую признак параллельности двух прямых: если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны. В этой теореме условием является первая часть утверждения: «при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны» (это дано), а заключением — вторая часть: «прямые параллельны» (это требуется доказать).

Теоремой, обратной данной, называется такая теорема, в которой условием является заключение данной теоремы, а заключением — условие данной теоремы. Докажем теоремы, обратные трём теоремам п. 25. Они называются **свойствами** параллельных прямых.

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей MN. Докажем, что накрест лежащие углы, например 1 и 2, равны (рис. 118).

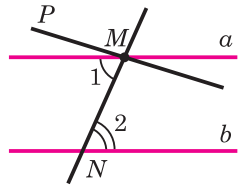


Рис. 118

Допустим, что углы 1 и 2 не равны. Отложим от луча MN угол PMN, равный углу 2, так, чтобы $\angle PMN$ и $\angle 2$ были накрест лежащими углами при пересечении прямых MP и b секущей MN. По построению эти накрест лежащие углы равны, поэтому $MP \parallel b$. Мы получили, что через точку M проходят две прямые (прямые a и MP), параллельные прямой b. Но это противоречит аксиоме параллельных прямых. Значит, наше допущение неверно и $\angle 1 = \angle 2$. **Теорема доказана.**

Замечание

При доказательстве этой теоремы мы использовали способ рассуждений, который называется **методом доказательства от противного**.

Мы предположили, что при пересечении параллельных прямых a и b секущей MN накрест лежащие углы 1 и 2 не равны, т. е. предположили противоположное тому, что нужно доказать. Исходя из этого предположения, путём рассуждений мы пришли к противоречию с аксиомой параллельных прямых. Это означает, что наше предположение неверно и, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Такой способ рассуждений часто используется в математике. Мы им пользовались и ранее, например в п. 12 при доказательстве того, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются. Этим же методом мы пользовались в п. 28 при доказательстве следствий 1^0 и 2^0 из аксиомы параллельных прямых.

Следствие

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Действительно, пусть $a \parallel b$, $c \perp a$, т. е. $\angle 1 = 90°$ (рис. 119). Прямая c пересекает прямую a, поэтому она пересекает также прямую b. При пересечении параллельных прямых a и b секущей c образуются равные накрест лежащие углы: $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle 1 = 90°$, то и $\angle 2 = 90°$, т. е. $c \perp b$, что и требовалось доказать.

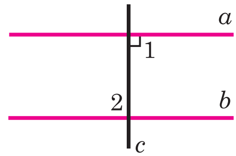


Рис. 119

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Докажем, что соответственные углы, например 1 и 2, равны (рис. 120). Так как $a \parallel b$, то накрест лежащие углы 1 и 3 равны. Углы 2 и 3 равны как вертикальные. Из равенств $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 3$ следует, что $\angle 1 = \angle 2$.

Теорема доказана.

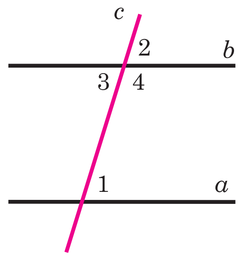


Рис. 120

Теорема

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Доказательство

Пусть параллельные прямые a и b пересечены секущей c (см. рис. 120). Докажем, например, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Так как $a \parallel b$, то соответственные углы 1 и 2 равны. Углы 2 и 4 смежные, поэтому $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Из равенств $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ следует, что $\angle 1 + \angle 4 = 180°$.

Теорема доказана.

Замечание

Если доказана некоторая теорема, то отсюда ещё не следует справедливость обратного утверждения. Более того, обратное утверждение не всегда верно. Приведём простой пример. Мы знаем, что если углы вертикальные, то они равны. Обратное утверждение: «если углы равны, то они вертикальные», конечно же, неверно.

30. Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

Докажем теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

Теорема

Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Доказательство

Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — данные углы и $OA \parallel O_1A_1$, $OB \parallel O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый, то и угол $A_1O_1B_1$ развёрнутый (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть угол AOB неразвёрнутый. Возможные случаи расположения углов AOB и $A_1O_1B_1$ изображены на рисунке 121, *а* и *б*. Прямая O_1B_1 пересекает прямую O_1A_1 и, следовательно, пересекает параллельную ей прямую OA в некоторой точке M. Параллельные прямые OB и O_1B_1 пересечены секущей OM, поэтому один из углов, образованных при пересечении прямых O_1B_1 и OA (угол 1 на рисунке 121), равен углу AOB (как накрест лежащие углы). Параллельные прямые OA и O_1A_1 пересечены секущей O_1M, поэтому либо $\angle 1 = \angle A_1O_1B_1$ (рис. 121, *а*), либо $\angle 1 + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (рис. 121, *б*). Из равенства $\angle 1 = \angle AOB$ и последних двух равенств следует, что либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (см. рис. 121, *а*), либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$ (см. рис. 121, *б*).

Теорема доказана.

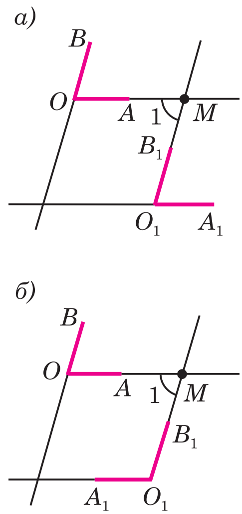


Рис. 121

Докажем теперь теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Теорема

Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют 180°.

Доказательство

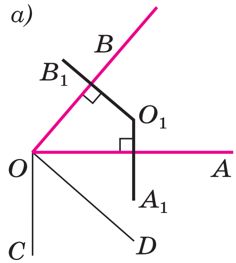
Пусть $\angle AOB$ и $\angle A_1O_1B_1$ — данные углы, $OA \perp O_1A_1$, $OB \perp O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый или прямой, то и угол $A_1O_1B_1$ развёрнутый или прямой (объясните почему), поэтому эти углы равны. Пусть $\angle AOB < 180°$, $O \notin O_1A_1$, $O \notin O_1B_1$ (случаи $O \in O_1A_1$, $O \in O_1B_1$ рассмотрите самостоятельно).

Возможны два случая (рис. 122).

1^0. $\angle AOB < 90°$ (см. рис. 122, *а*). Проведём луч OC так, чтобы прямые OA и OC были взаимно перпендикулярными, а точки B и C лежали по разные стороны от прямой OA. Далее, проведём луч OD так, чтобы прямые OB и OD были взаимно перпендикулярными, а точки C и D лежали по одну сторону от прямой OA. Поскольку $\angle AOB = 90° - \angle AOD$ и $\angle COD = 90° - \angle AOD$, то $\angle AOB = \angle COD$. Стороны угла COD соответственно параллельны сторонам угла $A_1O_1B_1$ (объясните почему), поэтому либо $\angle COD = \angle A_1O_1B_1$, либо $\angle COD + \angle A_1O_1B_1 = 180°$. Следовательно, либо $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, либо $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

2^0. $\angle AOB > 90°$ (см. рис. 122, *б*). Проведём луч OC так, чтобы угол AOC был смежным с углом AOB. Угол AOC острый, и его стороны соответственно перпендикулярны сторонам угла $A_1O_1B_1$. Следовательно, либо $\angle AOC + \angle A_1O_1B_1 = 180°$, либо $\angle AOC = \angle A_1O_1B_1$. В первом случае $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$, во втором случае $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = 180°$.

Теорема доказана.



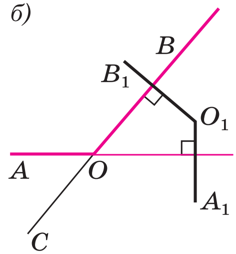


Рис. 122

Задачи

201 Дан треугольник ABC. Сколько прямых, параллельных стороне AB, можно провести через вершину C?

202 Через точку, не лежащую на прямой p, проведены четыре прямые. Сколько из этих прямых пересекают прямую p? Рассмотрите все возможные случаи.

203 Прямые a и b перпендикулярны к прямой p, прямая c пересекает прямую a. Пересекает ли прямая c прямую b?

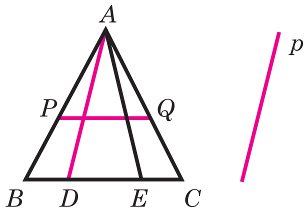


Рис. 123

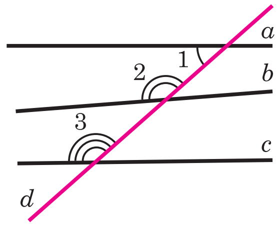


Рис. 124

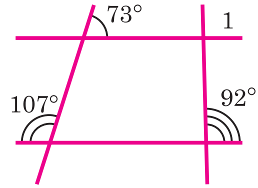


Рис. 125

204 Прямая p параллельна стороне AB треугольника ABC. Докажите, что прямые BC и AC пересекают прямую p.

205 На рисунке 123 $AD \parallel p$ и $PQ \parallel BC$. Докажите, что прямая p пересекает прямые AB, AE, AC, BC и PQ.

206 Сумма накрест лежащих углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 210°. Найдите эти углы.

207 На рисунке 124 прямые a, b и c пересечены прямой d, $\angle 1 = 42°$, $\angle 2 = 140°$, $\angle 3 = 138°$. Какие из прямых a, b и c параллельны?

208 Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых a и b секущей c, если:
а) один из углов равен 150°;
б) один из углов на 70° больше другого.

209 Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых a и b. Прямая, проходящая через середину O этого отрезка, пересекает прямые a и b в точках C и D. Докажите, что $CO = OD$.

210 По данным рисунка 125 найдите $\angle 1$.

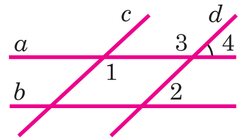


Рис. 126

211 $\angle ABC = 70°$, а $\angle BCD = 110°$. Могут ли прямые AB и CD быть:
а) параллельными;
б) пересекающимися?

212 Ответьте на вопросы задачи **211**, если $\angle ABC = 65°$, а $\angle BCD = 105°$.

213 Разность двух односторонних углов при пересечении двух параллельных прямых секущей равна 50°. Найдите эти углы.

214 На рисунке 126 $a \parallel b$, $c \parallel d$, $\angle 4 = 45°$. Найдите углы 1, 2 и 3.

215 Два тела P_1 и P_2 подвешены на концах нити, перекинутой через блоки A и B (рис. 127). Третье тело P_3 подвешено к той же нити в точке C и уравновешивает тела P_1 и P_2. (При этом $AP_1 \parallel BP_2 \parallel CP_3$.) Докажите, что $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.

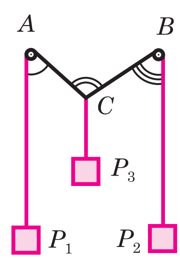


Рис. 127

216 Две параллельные прямые пересечены секущей. Докажите, что: а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны; б) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.

217 Прямые, содержащие высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC, пересекаются в точке H, угол B — тупой, $\angle C = 20°$. Найдите угол AHB.

Вопросы для повторения к главе III

1 Дайте определение параллельных прямых. Какие два отрезка называются параллельными?

2 Что такое секущая по отношению к двум прямым? Назовите пары углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей.

3 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

4 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

5 Докажите, что если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

6 Расскажите о практических способах проведения параллельных прямых.

7 Объясните, какие утверждения называются аксиомами. Приведите примеры аксиом.

8 Докажите, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной.

9 Сформулируйте аксиому параллельных прямых.

10 Какое утверждение называется следствием? Докажите, что прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и другую.

11 Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

12 Какая теорема называется обратной данной теореме? Приведите примеры теорем, обратных данным.

13 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.

14 Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

15 Докажите, что при пересечении двух параллельных прямых секущей:
а) соответственные углы равны;
б) сумма односторонних углов равна 180°.

16 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно параллельными сторонами.

17 Сформулируйте и докажите теорему об углах с соответственно перпендикулярными сторонами.

Дополнительные задачи

218 На рисунке 128 $CE = ED$, $BE = EF$ и $KE \parallel AF$. Докажите, что $KE \parallel BC$.

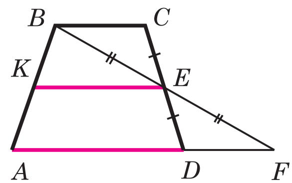


Рис. 128

219 Прямая, проходящая через середину биссектрисы AD треугольника ABC и перпендикулярная к AD, пересекает сторону AC в точке M. Докажите, что $MD \parallel AB$.

220 По данным рисунка 129, *а* найдите угол 1.

221 На рисунке 129, *б* DE — биссектриса угла ADF. По данным рисунка найдите углы треугольника ADE.

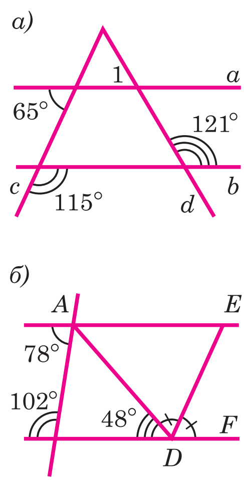


Рис. 129

222 Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

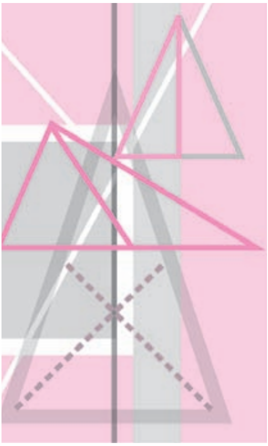
223 Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую, которая пересекает прямую a и параллельна прямой b? Ответ обоснуйте.

224* Даны две прямые a и b. Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

225 Докажите, что если при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы не равны, то прямые a и b пересекаются.

226 Даны треугольник ABC и точки M и N такие, что середина отрезка BM совпадает с серединой стороны AC, а середина отрезка CN — с серединой стороны AB. Докажите, что точки M, N и A лежат на одной прямой.

227 Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. С помощью циркуля и линейки через точку A проведите прямую, параллельную прямой a.



Глава IV

Соотношения между сторонами и углами треугольника

В этой главе мы снова обращаемся к треугольникам и будем обсуждать различные их свойства, при этом большое внимание уделим прямоугольным треугольникам, т. е. таким треугольникам, у которых один угол прямой. Некоторые свойства прямоугольных треугольников находят практическое применение, например, в конструкциях уголковых отражателей, которые широко используются в различных устройствах — от велосипедов до космических аппаратов.

§1 Сумма углов треугольника

31. Теорема о сумме углов треугольника

Докажем одну из важнейших теорем геометрии — теорему о сумме углов треугольника.

Теорема

Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

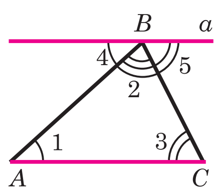


Рис. 130

Проведём через вершину B прямую a, параллельную стороне AC (рис. 130). Углы 1 и 4 являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых a и AC секущей AB, а углы 3 и 5 — накрест лежащими углами при пересечении тех же параллельных прямых секущей BC. Поэтому

$$\angle 4 = \angle 1,\ \angle 5 = \angle 3. \qquad (1)$$

Очевидно, сумма углов 4, 2 и 5 равна развёрнутому углу с вершиной B, т. е. $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$.

Отсюда, учитывая равенства (1), получаем: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$, или $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Теорема доказана.

Чтобы найти сумму углов четырёхугольника, его можно разбить на два треугольника. Получим, что сумма углов четырёхугольника равна 360°. Аналогично можно найти сумму углов других многоугольников.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. Докажем, что **внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.**

Обратимся к рисунку 131, на котором угол 4 — внешний угол, смежный с углом 3 данного треугольника. Так как $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, а по теореме о сумме углов треугольника $(\angle 1 + \angle 2) + \angle 3 = 180°$, то $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, что и требовалось доказать.

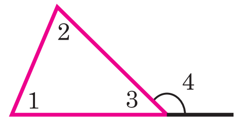


Рис. 131

Следствие

Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла этого треугольника, не смежного с ним.

32. Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники

Из теоремы о сумме углов треугольника следует, что если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то сумма двух других углов не превосходит 90°, и поэтому каждый из них острый. Таким образом, **в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.**

Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется **остроугольным** (рис. 132, *а*). Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется **тупоугольным** (рис. 132, *б*). Если один из углов треугольника

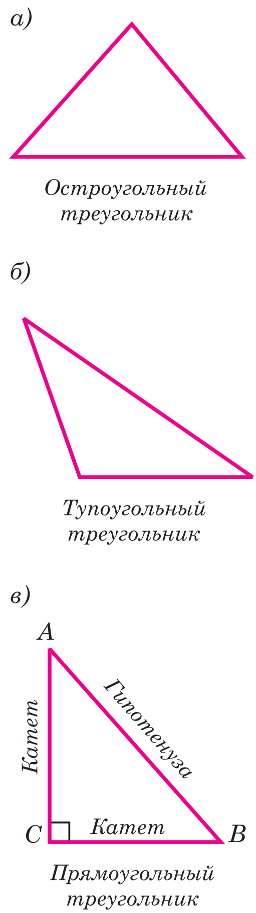


Рис. 132

прямой, то треугольник называется **прямоугольным**. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а две другие стороны — **катетами**. На рисунке 132, *в* изображён прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C.

Задачи

228 Найдите угол C треугольника ABC, если: а) $\angle A = 65°$, $\angle B = 57°$; б) $\angle A = 24°$, $\angle B = 130°$; в) $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$; г) $\angle A = 60° + \alpha$, $\angle B = 60° - \alpha$.

229 Найдите углы треугольника ABC, если $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 3 : 4$.

230 Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен $60°$.

231 Докажите, что: а) углы при основании равнобедренного треугольника острые; б) внешние углы при основании равнобедренного треугольника тупые.

232 Найдите углы равнобедренного треугольника, если: а) угол при основании в 2 раза больше угла, противолежащего основанию; б) угол при основании в 3 раза меньше внешнего угла, смежного с ним.

233 Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) $40°$; б) $60°$; в) $100°$.

234 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите $\angle ADC$, если $\angle C = 50°$.

235 Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите угол AMB, если $\angle A = 58°$, $\angle B = 96°$.

236 Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

237 Верно ли утверждение: если треугольник равнобедренный, то один из его внешних углов в 2 раза больше угла треугольника, не смежного с этим внешним углом?

238 Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.

239 Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен $115°$. Найдите углы треугольника.

240 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 110°$.

§2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

33. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника

Теорема

В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, **против большего угла лежит бóльшая сторона.**

Доказательство

1) Пусть в треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC (рис. 133, *а*). Докажем, что $\angle C > \angle B$.

Отложим на стороне AB отрезок AD, равный стороне AC (рис. 133, *б*). Так как $AD < AB$, то точка D лежит между точками A и B. Следовательно, угол 1 является частью угла C, и, значит, $\angle C > \angle 1$. Угол 2 — внешний угол треугольника BDC, поэтому $\angle 2 > \angle B$. Углы 1 и 2 равны как углы при основании равнобедренного треугольника ADC. Таким образом, $\angle C > \angle 1$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle B$. Отсюда следует, что $\angle C > \angle B$.

2) Пусть в треугольнике ABC $\angle C > \angle B$. Докажем, что $AB > AC$.

Предположим, что это не так. Тогда либо $AB = AC$, либо $AB < AC$. В первом случае треугольник ABC — равнобедренный, и, значит, $\angle C = \angle B$. Во втором случае $\angle B > \angle C$ (против большей стороны лежит больший угол). И то и другое противоречит условию: $\angle C > \angle B$. Поэтому наше предположение неверно, и, следовательно, $AB > AC$.

Теорема доказана.

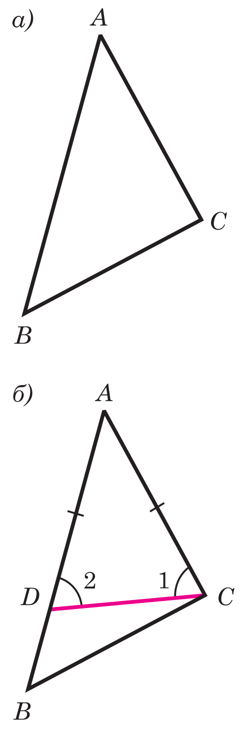


Рис. 133

Следствие 1

В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

В самом деле, гипотенуза лежит против прямого угла, а катет — против острого. Так как прямой угол больше острого, то гипотенуза больше катета.

Следствие 2

Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный (признак равнобедренного треугольника).

Докажем этот признак. Пусть в треугольнике два угла равны. Тогда равны и стороны, лежащие против этих углов. Действительно, если предположить, что одна из указанных сторон больше другой, то угол, лежащий против неё, будет больше угла, лежащего против другой стороны, а это противоречит условию (тому, что данные углы равны).

Итак, в треугольнике две стороны равны, т. е. треугольник — равнобедренный.

34. Неравенство треугольника

Теорема

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что $AB < AC + CB$. Отложим на продолжении стороны AC отрезок CD, равный стороне CB (рис. 134). В равнобедренном треугольнике BCD $\angle 1 = \angle 2$, а в треугольнике ABD $\angle ABD > \angle 1$ и, значит, $\angle ABD > \angle 2$.

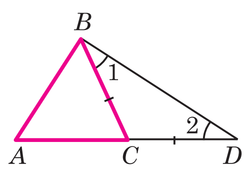


Рис. 134

Так как в треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона, то $AB < AD$. Но $AD = AC + CD = AC + CB$, поэтому $AB < AC + CB$.

Теорема доказана.

Следствие

Для любых трёх точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства: $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$.

Каждое из этих неравенств называется **неравенством треугольника**.

Задачи

241 Сравните углы треугольника ABC и выясните, может ли быть угол A тупым, если: а) $AB > BC > AC$; б) $AB = AC < BC$.

242 Сравните стороны треугольника ABC, если: а) $\angle A > \angle B > \angle C$; б) $\angle A > \angle B = \angle C$.

243 Докажите, что в равнобедренном треугольнике отрезок, соединяющий любую точку основания, отличную от вершины, с противоположной вершиной, меньше боковой стороны.

244 Докажите, что в треугольнике медиана не меньше высоты, проведённой из той же вершины.

245 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.

246 Прямая, параллельная основанию равнобедренного треугольника ABC, пересекает боковые стороны AB и AC в точках M и N. Докажите, что треугольник AMN равнобедренный.

247 Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник равнобедренный.

248 Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная его биссектрисе AA_1 и пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что $AC = AD$.

249 Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная AC и пересекающая сторону AB в точке E. Докажите, что треугольник ADE равнобедренный.

250 Через точку пересечения биссектрис BB_1 и CC_1 треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой BC и пересекающая стороны AB и AC соответственно в точках M и N. Докажите, что $MN = BM + CN$.

251 На рисунке 135 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC, $OE \parallel AB$, $OD \parallel AC$. Докажите, что периметр $\triangle EDO$ равен длине отрезка BC.

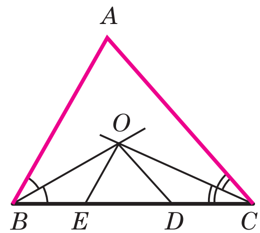


Рис. 135

252 На рисунке 136 $AB = AC$, $AP = AQ$. Докажите, что:
а) треугольник BOC равнобедренный;
б) прямая OA проходит через середину основания BC и перпендикулярна к нему.

253 Существует ли треугольник со сторонами: а) 1 м, 2 м и 3 м; б) 1,2 дм, 1 дм и 2,4 дм?

254 В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая равна 10 см. Какая из них является основанием?

255 Найдите сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны: а) 7 см и 3 см; б) 8 см и 2 см; в) 10 см и 5 см.

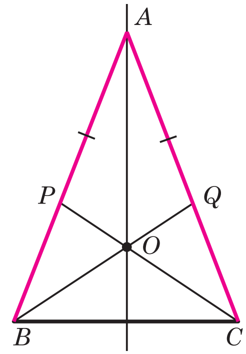


Рис. 136

256 Докажите ***неравенство о длине ломаной***. Длина ломаной не меньше длины отрезка, соединяющего её концы.

257 Два внешних угла треугольника при разных вершинах равны. Периметр треугольника равен 74 см, а одна из сторон равна 16 см. Найдите две другие стороны треугольника.

258 Периметр равнобедренного треугольника равен 25 см, разность двух сторон равна 4 см, а один из его внешних углов — острый. Найдите стороны треугольника.

§3 Прямоугольные треугольники

35. Некоторые свойства и признаки прямоугольных треугольников

Рассмотрим свойства и признаки прямоугольных треугольников, которые устанавливаются с помощью теоремы о сумме углов треугольника.

1⁰. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

В самом деле, сумма углов треугольника равна 180°, а прямой угол равен 90°, поэтому сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2⁰. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором угол A — прямой, $\angle B = 30^\circ$ и, значит, $\angle C = 60^\circ$ (рис. 137, *а*). Докажем, что $AC = \frac{1}{2}BC$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 137, *б*. Получим треугольник BCD, в котором $\angle B = \angle D = 60^\circ$, поэтому $DC = BC$. Но $AC = \frac{1}{2}DC$. Следовательно, $AC = \frac{1}{2}BC$, что и требовалось доказать.

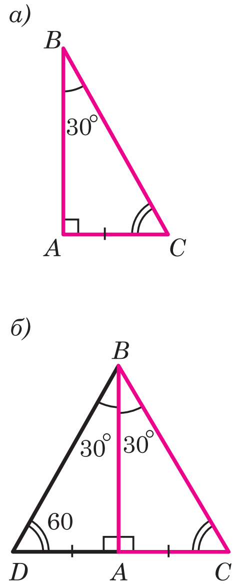


Рис. 137

3⁰. Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, у которого катет AC равен половине гипотенузы BC (рис. 138, *а*). Докажем, что $\angle ABC = 30^\circ$.

Приложим к треугольнику ABC равный ему треугольник ABD так, как показано на рисунке 138, *б*. Получим равносторонний треугольник BCD. Углы равностороннего треугольника равны друг другу (объясните почему), поэтому каждый из них равен 60°. В частности, $\angle DBC = 60^\circ$. Но $\angle DBC = 2\angle ABC$. Следовательно, $\angle ABC = 30^\circ$, что и требовалось доказать.

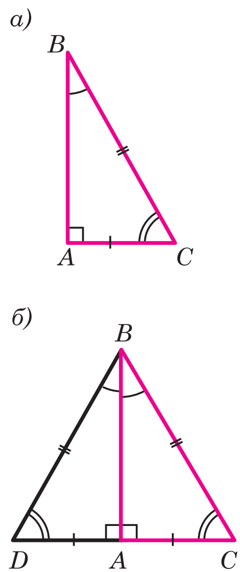


Рис. 138

4⁰. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC у которого угол A прямой. Проведём луч AM так, чтобы угол CAM был равен углу ACB треугольника (рис. 139), то есть $\angle 1 = \angle 2$. Тогда треугольник AMC — равнобедренный (объясните почему): $MC = MA$.

Ясно, что $\angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$ и по свойству 1⁰ $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$, поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но тогда и треугольник AMB — равнобедренный: $MB = MA$. Получили, что $MC = MA = MB$, т. е. AM является медианой и $AM = \frac{1}{2}BC$, что и требовалось доказать.

Для свойства 1^0 справедливо и обратное утверждение, которое является **признаком прямоугольного треугольника.**

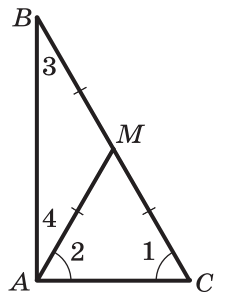


Рис. 139

1^0. Если в треугольнике сумма двух углов равна $90°$, то треугольник — прямоугольный.

Докажем ещё один признак прямоугольного треугольника.

2^0. Если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник — прямоугольный.

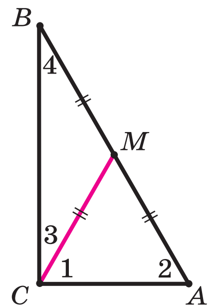


Рис. 140

Рассмотрим треугольник ABC, в котором медиана CM равна половине AB (см. рис. 140).

По теореме о сумме углов треугольника $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$. Треугольники CMA и CMB являются равнобедренными, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 90°$, т. е. в треугольнике ABC угол C — прямой, что и требовалось доказать.

36. Признаки равенства прямоугольных треугольников

Так как в прямоугольном треугольнике угол между двумя катетами прямой, а любые два прямых угла равны, то из первого признака равенства треугольников следует:

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

Далее, из второго признака равенства треугольников следует:

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

Рассмотрим ещё два признака равенства прямоугольных треугольников.

Теорема

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Из свойства 1^0 п. 35 следует, что в таких треугольниках два других острых угла также равны, поэтому треугольники равны по второму признаку равенства треугольников, т. е. по стороне (гипотенузе) и двум прилежащим к ней углам.

Теорема доказана.

Теорема

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых углы C и C_1 — прямые, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 141). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle C = \angle C_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина C совместится с вершиной C_1, а стороны CA и CB наложатся соответственно на лучи C_1A_1 и C_1B_1. Поскольку $CB = C_1B_1$, то вершина B совместится с вершиной B_1. Но тогда вершины A и A_1 также совместятся. В самом деле, если предположить, что точка A совместится с некоторой

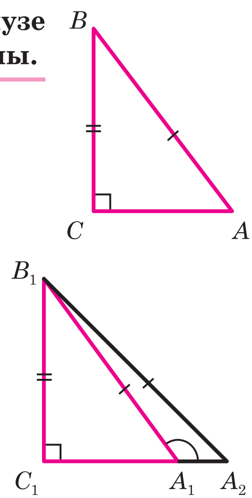


Рис. 141

другой точкой A_2 луча C_1A_1, то получим равнобедренный треугольник $A_1B_1A_2$, в котором углы при основании A_1A_2 не равны (на рисунке 141, *б* $\angle A_2$ — острый, а $\angle A_1$ — тупой как смежный с острым углом $B_1A_1C_1$). Но это невозможно, поэтому вершины A и A_1 совместятся.

Следовательно, полностью совместятся треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, т. е. они равны.

Теорема доказана.

Задачи

259 Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

260 В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE проведена высота CF. Найдите $\angle ECF$, если $\angle D = 54°$.

261 Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего из катетов равна 26,4 см. Найдите гипотенузу треугольника.

262 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине A равен 120°, $AC + AB = 18$ см. Найдите AC и AB.

263 Из середины D стороны BC равностороннего треугольника ABC проведён перпендикуляр DM к прямой AC. Найдите AM, если $AB = 12$ см.

264 Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°. Высота, проведённая к боковой стороне, равна 9 см. Найдите основание треугольника.

265 Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 7,6 см, а боковая сторона треугольника равна 15,2 см. Найдите углы этого треугольника.

266 Докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведённые из вершин основания, равны.

267 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 — прямые, BD и B_1D_1 — биссектрисы. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle B = \angle B_1$ и $BD = B_1D_1$.

268 Высоты, проведённые к боковым сторонам AB и AC остроугольного равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Найдите углы треугольника, если $\angle BMC = 140°$.

269 Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите $\angle AMB$, если $\angle A = 55°$, $\angle B = 67°$.

270 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса AF и высота AH. Найдите углы треугольника AHF, если $\angle B = 112°$.

271 На сторонах угла O отмечены точки A и B так, что $OA = OB$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке C. Докажите, что луч OC — биссектриса угла O.

272 Докажите, что два остроугольных треугольника равны, если сторона и высоты, проведённые из концов этой стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и высотам, проведённым из концов этой стороны, другого треугольника.

273 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

274 Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно.

275 Внутри угла дана точка A. Постройте прямую, проходящую через точку A и отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

276 Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в $30°$, равен 5 см. Найдите медиану этого треугольника, проведённую к гипотенузе.

277 Две вершины треугольника являются концами диаметра окружности, а третья вершина лежит на окружности. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

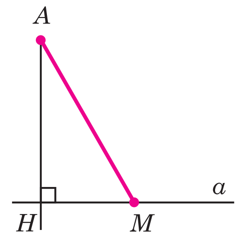
278 К гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC с углом $15°$ проведены медиана CM и высота CH. Найдите AB, если $CH = 4$.

§4 Построение треугольника по трём элементам

37. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

Расстоянием между двумя точками мы назвали длину отрезка, соединяющего эти точки. Введём понятие расстояния от точки до прямой.

Пусть отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой a, M — любая точка прямой a, отличная от H (рис. 142). Отрезок AM называется **наклонной**, проведённой из точки A к прямой a, а отрезок HM — **проекцией наклонной**. В прямоугольном треугольнике AHM катет AH меньше гипотенузы AM.



Отрезок AM — наклонная к прямой a. Отрезок HM — проекция наклонной

Рис. 142

Следовательно, **перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.**

Длина перпендикуляра, проведённого из точки к прямой, называется **расстоянием от этой точки до прямой.**

Отметим, что расстояние от точки до прямой равно наименьшему из расстояний от этой точки до точек прямой.

На рисунке 143 расстояние от точки B до прямой p равно 3 см, а расстояние от точки C до этой прямой равно 5 см.

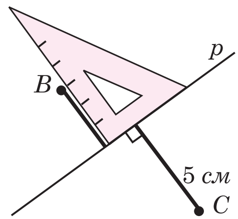


Рис. 143

Введём теперь понятие расстояния между параллельными прямыми. Предварительно рассмотрим одно из важнейших свойств параллельных прямых.

Теорема

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

Доказательство

Рассмотрим параллельные прямые a и b. Отметим на прямой a точку A и проведём из этой точки перпендикуляр AB к прямой b (рис. 144). Докажем, что расстояние от любой точки X прямой a до прямой b равно AB.

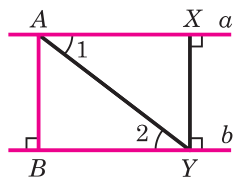


Рис. 144

Проведём из точки X перпендикуляр XY к прямой b. Так как $XY \perp b$, то $XY \perp a$. Прямоугольные треугольники ABY и YXA равны по гипотенузе и острому углу (AY — общая гипотенуза, а углы 1 и 2 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых a и b секущей AY). Следовательно, $XY = AB$.

Итак, любая точка X прямой a находится на расстоянии AB от прямой b. Очевидно, все точки прямой b находятся на таком же расстоянии от прямой a.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что точка, движущаяся по одной из параллельных прямых, всё время находится на одном и том же расстоянии от другой прямой.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой называется **расстоянием между этими прямыми.**

Отметим, что расстояние между параллельными прямыми равно наименьшему из расстояний от точек одной прямой до точек другой прямой.

Замечание 1

Справедливо утверждение, обратное доказанной теореме: **все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудалённые от неё, лежат на прямой, параллельной данной.** (Докажите это самостоятельно.)

Замечание 2

Из доказанной теоремы и ей обратной следует, что **множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.**

В самом деле, пусть a — данная прямая, d — данное расстояние. Отметим на прямой a произвольную точку A и проведём отрезок AB длины d, перпендикулярный к прямой a; через точку B проведём прямую b, параллельную прямой a (сделайте соответствующий рисунок). По доказанной теореме все точки прямой b находятся на расстоянии d от прямой a, т. е. все они принадлежат искомому множеству. В силу обратной теоремы любая точка искомого множества лежит на прямой b. Таким образом, искомым множеством является прямая b.

Множество всех точек, удовлетворяющих какому-либо условию, иногда называют **геометрическим местом точек**, удовлетворяющих этому условию. Можно сказать тем самым, что геометрическое место точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

На этом факте основано устройство инструмента, называемого **рейсмусом** (рис. 145, *а*). Рейсмус используется в столярном деле для разметки на поверхности деревянного бруска прямой, параллельной краю бруска. При передвижении рейсмуса вдоль края бруска металлическая игла прочерчивает отрезок прямой, параллельный краю бруска (рис. 145, *б*).

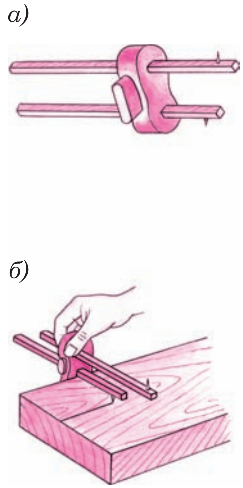


Рис. 145

38. Построение треугольника по трём элементам

Задача 1

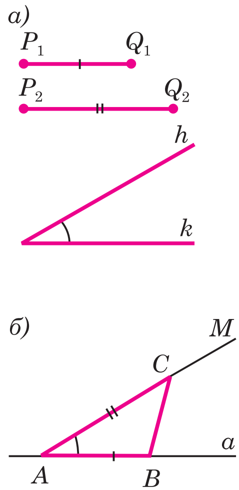
Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Решение

Прежде всего уточним, как нужно понимать эту задачу, т. е. что здесь дано и что нужно построить.

Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и угол hk (рис. 146, *а*). Требуется с помощью циркуля и линейки (без масштабных делений) построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол A между этими сторонами равен данному углу hk.

Проведём прямую a и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 146, *б*). Затем построим угол BAM, равный данному углу hk (как это сделать, мы знаем). На луче AM отложим отрезок AC, рав-



Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Рис. 146

ный отрезку P_2Q_2, и проведём отрезок BC. Построенный треугольник ABC — искомый.

В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1, P_2Q_2 и данном неразвёрнутом угле hk искомый треугольник построить можно. Так как прямую a и точку A на ней можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условиям задачи. Все эти треугольники равны друг другу (по первому признаку равенства треугольников), поэтому принято говорить, что **данная задача имеет единственное решение.**

Задача 2

Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Решите эту задачу самостоятельно.

Задача 3

Построить треугольник по трём его сторонам.

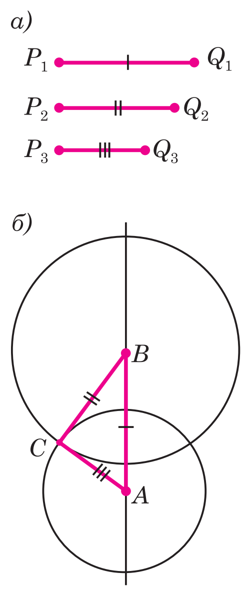
Решение

Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3 (рис. 147, *а*). Требуется построить треугольник ABC, в котором $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$.

Проведём прямую и на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1Q_1 (рис. 147, *б*). Затем построим две окружности: одну — с центром A и радиусом P_3Q_3, а другую — с центром B и радиусом P_2Q_2. Пусть точка C — одна из точек пересечения этих окружностей. Проведя отрезки AC и BC, получим искомый треугольник ABC.

В самом деле, по построению $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = P_3Q_3$, т. е. стороны треугольника ABC равны данным отрезкам.

Задача 3 не всегда имеет решение. Действительно, во всяком треугольнике сумма любых



Построение треугольника по трём сторонам

Рис. 147

двух сторон больше третьей стороны, поэтому если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других, то нельзя построить треугольник, стороны которого равнялись бы данным отрезкам.

Задачи

279 Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, сумма длин которых равна 17 см, а разность длин равна 1 см. Найдите расстояние от точки до прямой.

280 В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Расстояние от точки D до прямой AC равно 6 см. Найдите расстояние от вершины A до прямой BC.

281 Сумма гипотенузы CE и катета CD прямоугольного треугольника CDE равна 31 см, а их разность равна 3 см. Найдите расстояние от вершины C до прямой DE.

282 Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от боковых сторон.

283 На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка M, равноудалённая от боковых сторон. Докажите, что CM — высота треугольника ABC.

284 Через середину отрезка проведена прямая. Докажите, что концы отрезка равноудалены от этой прямой.

285 Расстояние между параллельными прямыми a и b равно 3 см, а между параллельными прямыми a и c равно 5 см. Найдите расстояние между прямыми b и c.

286 Прямая AB параллельна прямой CD. Найдите расстояние между этими прямыми, если $\angle ADC = 30°$, $AD = 6$ см.

287* Докажите, что все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудалённые от неё, лежат на прямой, параллельной данной.

288 Даны неразвёрнутый угол ABC и отрезок PQ. Что представляет собой множество всех точек, лежащих внутри данного угла и удалённых от прямой BC на расстояние PQ?

289 Что представляет собой множество всех точек плоскости, равноудалённых от двух данных параллельных прямых?

290 Прямые a и b параллельны. Докажите, что середины всех отрезков XY, где $X \in a$, $Y \in b$, лежат на прямой, параллельной прямым a и b и равноудалённой от этих прямых.

291 Что представляет собой множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой?

Задачи на построение

292 Даны прямая a и отрезок AB. Постройте прямую p, параллельную прямой a, так, чтобы расстояние между прямыми a и p было равно AB.

Решение

Отметим на прямой a какую-нибудь точку C и проведём через точку C прямую b, перпендикулярную к прямой a (рис. 148). Затем на одном из лучей прямой b, исходящих из точки C, отложим отрезок CD, равный отрезку AB. Через точку D проведём прямую p, перпендикулярную к прямой b. Прямая p — искомая (объясните почему).

Как видно из построения, для любой данной прямой a и любого данного отрезка AB искомую прямую можно построить, причём задача имеет два решения (прямые p и p_1 на рисунке 149).

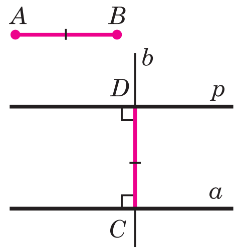


Рис. 148

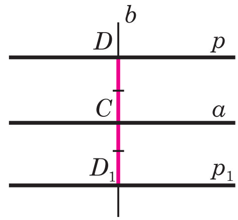


Рис. 149

293 Даны пересекающиеся прямые a и b и отрезок PQ. На прямой a постройте точку, удалённую от прямой b на расстояние PQ.

294 Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведённой из вершины этого угла.

295 Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к одной из двух других сторон, и углу между данными стороной и медианой.

296 Даны отрезок PQ и угол hk. Постройте треугольник ABC так, чтобы:

а) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle hk$;

б) $AB = PQ$, $\angle ABC = \angle hk$, $\angle BAC = \frac{1}{4} \angle hk$.

297 Даны два угла hk и h_1k_1 и отрезок PQ. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = PQ$, $\angle A = \angle hk$, $\angle B = \frac{1}{2} \angle h_1k_1$.

298 Постройте прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) по катету и прилежащему к нему острому углу.

299 Постройте равнобедренный треугольник: а) по боковой стороне и углу, противолежащему основанию; б) по основанию и углу при основании; в) по боковой стороне и углу при основании; г) по основанию и боковой стороне; д) по основанию и медиане, проведённой к основанию.

300 Даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Постройте треугольник ABC так, чтобы:

а) $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = 2P_3Q_3$;

б) $AB = 2P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$, $CA = \frac{3}{2}P_3Q_3$.

Всегда ли задача имеет решение?

301 Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и высоте, проведённой к этой стороне.

Решение

Даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk (рис. 150, *а*). Требуется построить треугольник ABC, у которого одна из сторон, скажем AB, равна отрезку P_1Q_1, один из прилежащих к ней углов, например угол A, равен данному углу hk, а высота CH, проведённая к стороне AB, равна данному отрезку P_2Q_2.

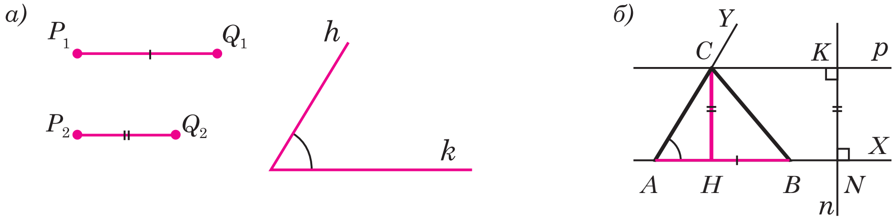


Рис. 150

Построим угол XAY, равный данному углу hk, и отложим на луче AX отрезок AB, равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 150, *б*). Для построения вершины C искомого треугольника заметим, что расстояние от точки C до прямой AB должно равняться P_2Q_2. Множеством всех точек плоскости, находящихся на расстоянии P_2Q_2 от прямой AB и лежащих по ту же сторону от прямой AB, что и точка Y, является прямая p, параллельная прямой AB и находящаяся на расстоянии P_2Q_2 от прямой AB. Следовательно, искомая точка C есть точка пересечения прямой p и луча AY. Построение прямой p описано в решении задачи **292**. Очевидно, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи: $AB = P_1Q_1$, $CH = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$.

302 Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из этих сторон.

303 Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к одной из этих сторон.

Вопросы для повторения к главе IV

1 Сформулируйте и докажите теорему о сумме углов треугольника.

2 Какой угол называется внешним углом треугольника? Докажите, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

3 Докажите, что в любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.

4 Какой треугольник называется остроугольным? Какой треугольник называется тупоугольным?

5 Какой треугольник называется прямоугольным? Как называются стороны прямоугольного треугольника?

6 Докажите, что в треугольнике:

1) против большей стороны лежит больший угол;

2) обратно, против большего угла лежит бо́льшая сторона.

7 Докажите, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.

8 Докажите, что если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

9 Докажите, что каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Что такое неравенство треугольника?

10 Докажите, что сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

11 Докажите, что катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

12 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.

13 Сформулируйте и докажите утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

14 Объясните, какой отрезок называется наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой, и какой отрезок называется проекцией наклонной.

15 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.

16 Докажите, что любая наклонная, проведённая из данной точки к данной прямой, меньше суммы перпендикуляра, проведённого из той же точки к этой прямой, и проекции наклонной.

17 Что называется расстоянием от точки до прямой?

18 Докажите, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

19 Что называется расстоянием между двумя параллельными прямыми?

20 Докажите, что множество всех точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной прямой и лежащих по одну сторону от неё, есть прямая, параллельная данной прямой.

21 Что такое геометрическое место точек? Приведите пример.

22 Объясните, как построить треугольник по: а) двум сторонам и углу между ними; б) стороне и двум прилежащим к ней углам.

23 Объясните, как построить треугольник по трём сторонам. Всегда ли эта задача имеет решение?

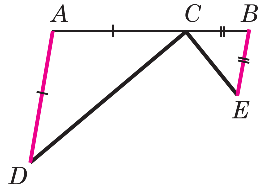


Рис. 151

Дополнительные задачи

304 В равнобедренном треугольнике ABC биссектрисы равных углов B и C пересекаются в точке O. Докажите, что угол BOC равен внешнему углу треугольника при вершине B.

305 На стороне AD треугольника ADC отмечена точка B так, что $BC = BD$. Докажите, что прямая DC параллельна биссектрисе угла ABC.

306 На рисунке 151 $AD \parallel BE$, $AC = AD$ и $BC = BE$. Докажите, что угол DCE — прямой.

307 На рисунке 152 $AB = AC$, $AP = PQ = QR = RB = BC$. Найдите угол A.

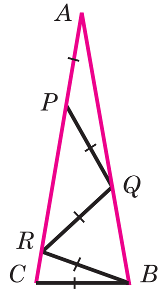


Рис. 152

308 Докажите, что в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведённой из вершины тупого угла, лежит на стороне треугольника, а основания высот, проведённых из вершин острых углов, — на продолжениях сторон.

309 Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что:
а) если $HM_1 = HM_2$, то $AM_1 = AM_2$;
б) если $HM_1 < HM_2$, то $AM_1 < AM_2$.

310 Из точки A к прямой a проведены перпендикуляр AH и наклонные AM_1 и AM_2. Докажите, что:
а) если $AM_1 = AM_2$, то $HM_1 = HM_2$;
б) если $AM_1 < AM_2$, то $HM_1 < HM_2$.

311* Докажите, что в треугольнике ABC медиана AM меньше полусуммы сторон AB и AC.

312* Докажите, что если точка M лежит внутри треугольника ABC, то $MB + MC < AB + AC$.

313 Докажите, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин меньше периметра треугольника.

314 Докажите **методом от противного**: если для трёх точек A, B и C справедливо равенство $AB = AC + CB$, то точки A, B и C лежат на одной прямой.

315 Докажите что, каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон.

316 В прямоугольном треугольнике проведена высота из вершины прямого угла. Докажите, что данный треугольник и два образовавшихся треугольника имеют соответственно равные углы.

317 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC, равным 37 см, внешний угол при вершине B равен 60°. Найдите расстояние от вершины C до прямой AB.

318 В треугольнике с неравными сторонами AB и AC ($AB > AC$) проведены высота AH и биссектриса AD. Докажите, что угол HAD равен полуразности углов B и C.

319 Докажите, что в равных треугольниках высоты, проведённые к равным сторонам, равны.

320 В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AR. Докажите, что периметр треугольника ARC меньше периметра треугольника ABC.

321 Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.

322* Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

323 Постройте прямоугольный треугольник по:
а) гипотенузе и острому углу;
б) катету и противолежащему углу;
в) гипотенузе и катету.

324 С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный: а) 30°; б) 60°; в) 15°; г) 120°; д) 150°; е) 135°; ж) 165°; з) 75°; и) 105°.

325* Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к ней, и медиане, проведённой к одной из двух других сторон.

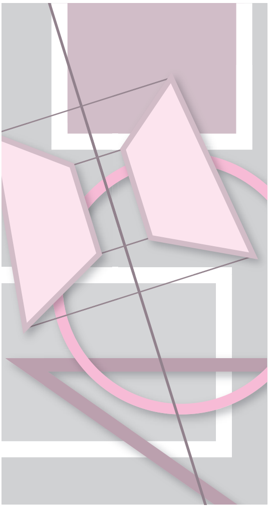
326 Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE, параллельный прямой AC, так, чтобы точки D и E лежали на сторонах AB и BC и $DE = AD + CE$.

327 Дан равносторонний треугольник ABC и точка B_1 на стороне AC. На сторонах BC и AB постройте точки A_1 и C_1 так, чтобы треугольник $A_1B_1C_1$ был равносторонним.

328* Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла.

329* Постройте треугольник по стороне, высоте и медиане, проведённым к этой стороне.

330* Дан треугольник ABC с прямым углом A. На стороне AB постройте точку M, находящуюся на расстоянии AM от прямой BC.



Глава V

Геометрические места точек. Симметричные фигуры

В этой главе мы продолжим изучение геометрических мест точек и особое внимание уделим одной из основных фигур — окружности. Будут доказаны некоторые свойства диаметров и хорд окружности, теоремы о касательных к окружности, об окружностях, вписанных в треугольник и описанных около треугольника. В главе вводится понятие фигур, симметричных относительно некоторой прямой (или обладающих осевой симметрией), а также приводятся примеры задач, для решения которых удобно применять свойства осевой симметрии.

§1 Геометрические места точек

39. Свойства биссектрисы угла

Напомним, что **геометрическим местом точек** называется множество всех точек, обладающих определённым свойством. Например, мы уже доказали ранее (п. 37), что **геометрическим местом точек плоскости, расположенных по одну сторону от данной прямой и равноудалённых от неё, является прямая, параллельная данной.**

Чтобы некоторую фигуру назвать геометрическим местом точек, необходимо проверить два условия:

1) каждая точка данной фигуры должна обладать заданным свойством;

2) каждая точка, обладающая заданным свойством, должна принадлежать этой фигуре.

Докажем, что биссектриса неразвёрнутого угла является некоторым геометрическим местом точек.

Теорема

Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон[1].

Обратно: **каждая точка, лежащая внутри угла и равноудалённая от сторон угла, лежит на его биссектрисе.**

Доказательство

1) Возьмём произвольную точку M на биссектрисе угла BAC, проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC и докажем, что $MK = ML$ (рис. 153).

Рассмотрим прямоугольные треугольники AMK и AML. Они равны по гипотенузе и острому углу (AM — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$ по условию). Следовательно, $MK = ML$.

2) Пусть точка M лежит внутри угла BAC и равноудалена от его сторон AB и AC. Докажем, что луч AM — биссектриса угла BAC (см. рис. 153).

Проведём перпендикуляры MK и ML к прямым AB и AC. Прямоугольные треугольники AMK и AML равны по гипотенузе и катету (AM — общая гипотенуза, $MK = ML$ по условию). Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Это означает, что луч AM — биссектриса угла BAC.

Теорема доказана.

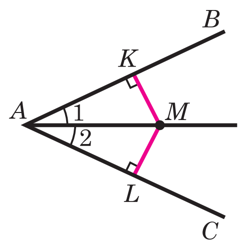


Рис. 153

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, лежащих внутри неразвёрнутого угла и равноудалённых от сторон угла, является биссектриса этого угла.

Следствие 2

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

[1] То есть равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.

Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC и проведём из этой точки перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к прямым AB, BC и CA (рис. 154).

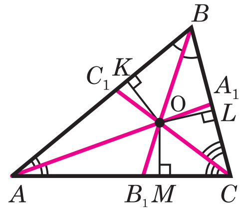


Рис. 154

По доказанной теореме $OK = OM$ и $OK = OL$. Поэтому $OM = OL$, т. е. точка O равноудалена от сторон угла ACB и, значит, лежит на биссектрисе CC_1 этого угла.

Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

Из доказанного утверждения следует:

точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от всех его сторон.

40. Свойства серединного перпендикуляра к отрезку

Напомним, что **серединным перпендикуляром к отрезку** называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

Докажем, что серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек.

Теорема

Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.
Обратно: **каждая точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.**

Доказательство

Пусть прямая m — серединный перпендикуляр к отрезку AB, точка O — середина этого отрезка (рис. 155, *а*).

1) Рассмотрим произвольную точку M прямой m и докажем, что $AM = BM$. Если точ-

ка M совпадает с точкой O, то это равенство верно, так как O — середина отрезка AB. Пусть M и O — различные точки. Прямоугольные треугольники OAM и OBM равны по двум катетам ($OA=OB$, OM — общий катет), поэтому $AM=BM$.

2) Рассмотрим произвольную точку N, равноудалённую от концов отрезка AB, и докажем, что точка N лежит на прямой m.

Если N — точка прямой AB, то она совпадает с серединой O отрезка AB и потому лежит на прямой m. Если же точка N не лежит на прямой AB, то треугольник ANB равнобедренный, так как $AN=BN$ (рис. 155, *б*). Отрезок NO — медиана этого треугольника, а значит, и высота. Таким образом, $NO\perp AB$, поэтому прямые ON и m совпадают, т. е. N — точка прямой m.

Теорема доказана.

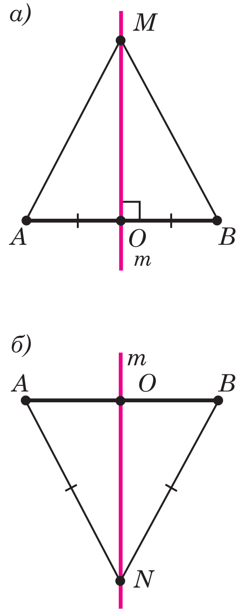


Рис. 155

Следствие 1

Геометрическим местом точек плоскости, равноудалённых от концов отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку.

Следствие 2

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим серединные перпендикуляры m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 156). Эти прямые пересекаются в некоторой точке O. В самом деле, если предположить противное, т. е. что $m \parallel n$, то прямая BA, будучи перпендикулярной к прямой m, была бы перпендикулярна и к параллельной ей прямой n, а тогда через точку B проходили бы две прямые BA и BC, перпендикулярные к прямой n, что невозможно.

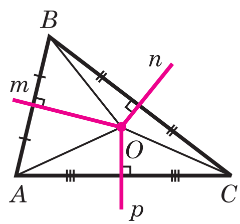


Рис. 156

По доказанной теореме $OB=OA$ и $OB=OC$. Поэтому $OA=OC$, т. е. точка O равноудалена от концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p к этому отрезку. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m, n и p к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O.

Из доказанного утверждения следует:

точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника равноудалена от всех его вершин.

Задачи

331 Определите геометрическое место всех точек плоскости, равноудалённых от двух пересекающихся прямых.

332 Определите геометрическое место всех точек плоскости, равноудалённых от двух данных параллельных прямых.

333 Даны два отрезка AB и CD. Постройте точку M, такую, что $MA = MB$ и $MC = MD$.

334 Даны угол и отрезок AB. Постройте точку M, равноудалённую от сторон угла и такую, что $MA = MB$.

335 Биссектрисы внешних углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CA.

§2 Окружность. Касательная к окружности

41. Свойства диаметров и хорд окружности

Напомним, что **окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки. Данная точка называется **центром** окружности, а заданное расстояние — **радиусом** этой окружности.

Из определения следует, что окружность представляет собой геометрическое место точек, равноудалённых от центра.

Окружность разбивает множество точек плоскости, не принадлежащих ей, на две части — **внутреннюю** и **внешнюю**. Внутренней части принадлежат те точки, для которых расстояние от центра окружности меньше радиуса, а внешней части — те точки, для которых расстояние от центра больше радиуса. Точки внутренней части называют **внутренними**, а точки внешней части — **внешними** относительно окружности. На рисунке 157 точки A, B, C и O — внутренние, а точки M, N и P — внешние относительно окружности.

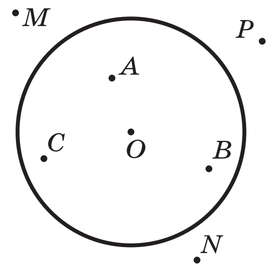


Рис. 157

1⁰. Диаметр, проведённый через середину хорды, перпендикулярен этой хорде.
Обратно: **диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам.**

1) Пусть диаметр AB окружности с центром O радиуса r проходит через середину M хорды CD (рис. 158, *а*). Докажем, что диаметр AB перпендикулярен хорде CD.

Треугольник COD равнобедренный (объясните почему), и отрезок OM является его медианой. В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является также высотой треугольника. Значит, OM перпендикулярен CD, поэтому AB перпендикулярен CD.

2) Пусть теперь диаметр AB данной окружности перпендикулярен хорде CD, и докажем, что он делит хорду пополам.

Рассмотрим диаметр EF, проходящий через середину M хорды CD (рис. 158, б). По доказан-

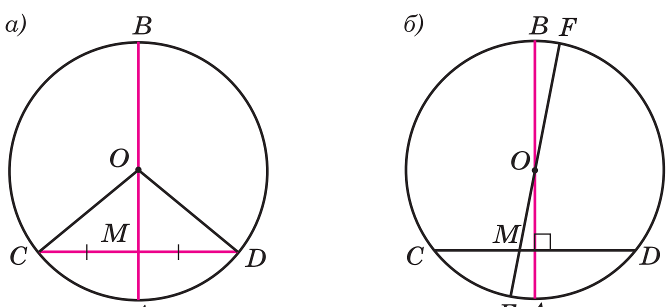


Рис. 158

ному выше, отрезки EF и CD перпендикулярны. Но тогда через центр O окружности проходят две прямые AB и EF, перпендикулярные CD, значит, они совпадают. Поэтому EF и AB — один и тот же диаметр.

Говорят, что **отрезок AB виден под прямым углом из точки C**, если угол ACB прямой.

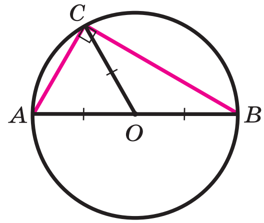


Рис. 159

2⁰. Каждая точка, из которой диаметр окружности виден под прямым углом, лежит на этой окружности.
Обратно: **из каждой точки окружности любой диаметр, не проходящий через данную точку, виден под прямым углом.**

1) Пусть AB — диаметр окружности с центром O. Тогда если для точки C угол ACB прямой, то в прямоугольном треугольнике ACB медиана CO равна половине гипотенузы, к которой она проведена. Тогда $OA = OB = OC$, т. е. C лежит на окружности с центром O радиуса OA.

2) Пусть точка C лежит на окружности с диаметром AB, O — центр этой окружности (рис. 159). Тогда точка O — середина отрезка AB. В треугольнике ACB медиана CO равна половине стороны, к которой она проведена, поэтому угол ACB прямой.

Доказанное утверждение позволяет определить ещё одно геометрическое место точек: **множество всех точек, из которых данный отрезок AB виден под прямым углом, есть окружность с диаметром AB (за исключением точек A и B).**

42. Взаимное расположение окружности и прямой. Касательная к окружности

Рассмотрим, как могут располагаться окружность и прямая, т. е. выясним, всегда ли они имеют общие точки и сколько общих точек они могут иметь.

Прямая не может иметь с окружностью более двух общих точек. Если какая-то прямая пересекает окружность с центром O в трёх точках A, B и C, то точка O равноудалена от концов отрезков AB и BC, поэтому лежит на серединных перпендикулярах p_1 и p_2 этих отрезков. Но две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

Таким образом, возможны следующие три случая взаимного расположения прямой и окружности:

1) прямая имеет с окружностью две общие точки (рис. 160, *а*), в этом случае прямую называют **секущей к окружности;**

2) прямая имеет с окружностью одну общую точку (рис. 160, *б*), в этом случае прямую называют **касательной к окружности**, а их общую точку — **точкой касания;**

3) прямая не имеет общих точек с окружностью (рис. 160, *в*).

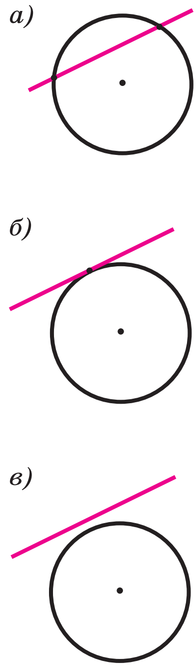


Рис. 160

Все точки касательной, за исключением точки касания, являются внешними точками относительно окружности.

Докажем теорему о свойстве касательной к окружности.

Теорема

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство

Пусть p — касательная к окружности с центром O, A — точка касания (рис. 161).

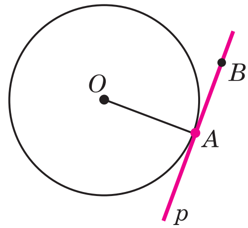


Рис. 161

Докажем, что касательная p перпендикулярна к радиусу OA.

Любая точка B касательной, отличная от точки A, является внешней относительно окружности, поэтому OB больше OA. Значит, OB — наклонная к прямой p, а OA — перпендикуляр (объясните почему).

Таким образом, прямая p перпендикулярна к радиусу OA.

Теорема доказана.

Рассмотрим две касательные к окружности с центром O, проходящие через точку A и касающиеся окружности в точках B и C (рис. 162). Отрезки AB и AC назовём **отрезками касательных, проведённых из точки** A. Они обладают следующим свойством:

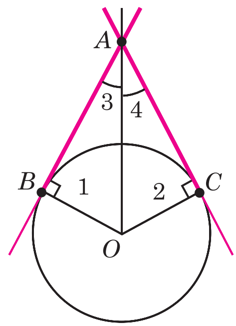


Рис. 162

отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Для доказательства этого утверждения обратимся к рисунку 162. По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники ABO и ACO прямоугольные. Они равны, так как имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC.

Следовательно, $AB = AC$ и $\angle 3 = \angle 4$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь теорему, обратную теореме о свойстве касательной (признак касательной).

Теорема

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведённым из центра окружности к данной прямой. Поэтому расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Но это и означает, что данная прямая является касательной к окружности.

Теорема доказана.

На этом признаке основано решение задач на построение касательной. Рассмотрим одну из таких задач.

Задача

Через данную точку A окружности с центром O провести касательную к этой окружности.

Решение

Проведём прямую OA, а затем построим прямую p, проходящую через точку A перпендикулярно к прямой OA.

По признаку касательной прямая p является искомой касательной.

43. Вписанная и описанная окружности треугольника

Если отрезок (луч) принадлежит прямой, касательной к окружности, и точка касания является точкой отрезка (луча), то говорят, что данный **отрезок (луч) является касательным к окружности.**

Окружность называется **вписанной в неразвёрнутый угол**, если она касается сторон этого угла. На рисунке 163 окружности с центрами A и B вписаны в угол MOP, а окружность с центром C нет. Центры всех окружностей, вписанных в угол, равноудалены от его сторон, поэтому принадлежат биссектрисе угла.

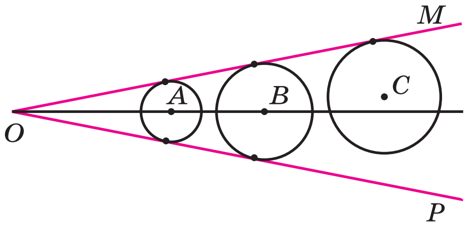


Рис. 163

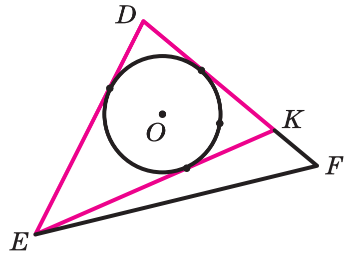


Рис. 164

Если все стороны треугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в треугольник, а треугольник — **описанным** около этой окружности. На рисунке 164 треугольник DEK описан около окружности с центром O, так как его все стороны касаются окружности, а треугольник DEF не является описанным около этой окружности, так как сторона EF не касается окружности.

Докажем теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема

В любой треугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и обозначим буквой O точку пересечения его биссектрис. Проведём из точки O перпендикуляры OK, OL и OM соответственно к сторонам AB, BC и CA (см. рис. 165). Так как точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, то $OK = OL = OM$. Поэтому окружность с центром O радиуса OK проходит через точки K, L и M. Стороны треугольника ABC касаются этой окружности в точках K, L, M, так как они перпендикулярны к радиусам OK, OL и OM. Значит, окружность с центром O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC.

Теорема доказана.

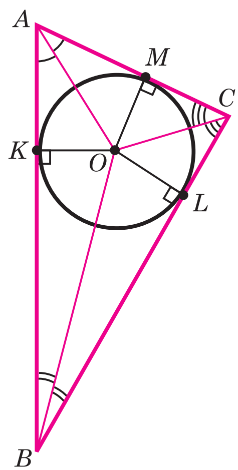


Рис. 165

Замечание 1

Отметим, что **в треугольник можно вписать только одну окружность.**

В самом деле, допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой окружности равноудалён от сторон треугольника и, значит, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около треугольника, а треугольник — **вписанным** в эту окружность. На рисунке 166 треугольник KMN вписан в окружность с центром O, а треугольник KMP не является вписанным в эту окружность, так как вершина P не лежит на окружности.

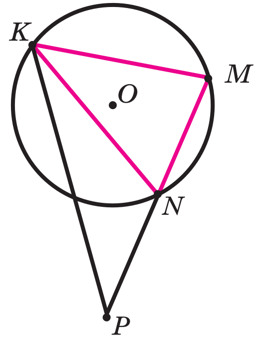


Рис. 166

Докажем теорему об окружности, описанной около треугольника.

Теорема

Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам и проведём отрезки OA, OB и OC (рис. 167). Так как точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, то $OA = OB = OC$. Поэтому окружность с центром O радиуса OA проходит через все три вершины треугольника и, значит, является описанной около треугольника ABC. **Теорема доказана.**

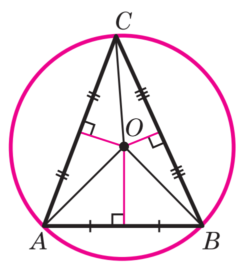


Рис. 167

Замечание 2

Отметим, что **около треугольника можно описать только одну окружность.**

В самом деле, допустим, что около треугольника можно описать две окружности. Тогда центр каждой из них равноудалён от его вершин и поэтому совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Следовательно, эти окружности совпадают.

Задачи

336 Докажите, что хорда, не проходящая через центр окружности, меньше диаметра.

337 Докажите, что если две хорды AB и AC окружности равны, то ни одна из них не является диаметром этой окружности.

338 Докажите, что если точка C — внутренняя точка относительно окружности, не лежащая на её диаметре AB, то угол ACB тупой.

339 Докажите, что если AB — диаметр окружности и C — внешняя точка относительно этой окружности, не лежащая на прямой AB, то угол ACB острый.

340 Докажите, что середины параллельных хорд лежат на одном диаметре.

341 Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от её центра.

342 Докажите, что если хорды окружности равноудалены от её центра, то они равны.

343 Докажите, что если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, то прямая является касательной к окружности.

344 Прямая a касается окружности с центром O. Найдите расстояние от точки O до прямой a, если диаметр окружности равен 14 см.

345 Докажите, что касательные, проведённые через концы диаметра окружности, параллельны.

346 Найдите длину отрезка AB, касательного к окружности с центром O, где B — точка касания, если угол AOB равен 45°, а радиус окружности — 12 см.

347 Прямая p является касательной к окружности с центром O, A — точка касания. На этой прямой отмечены точки B, C и D так, что точка A лежит между точками B и C, а точка C — между точками A и D. Укажите: а) какие из следующих отрезков являются касательными: AC, BC, CD; б) какие из следующих лучей являются касательными: AC, CA, CD, DB?

348 Две окружности с центрами O_1 и O_2 вписаны в угол. Одна из них касается его сторон в точках A и D, а вторая — в точках B и C. Докажите, что $AB = CD$.

349 Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.

350 Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите угол ACB.

351 Угол между диаметром AB и хордой AC равен 30°. Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке D. Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.

352 Даны окружность с центром O радиуса 4,5 см и точка A. Через точку A проведены две касательные к окружности. Найдите угол между ними, если $OA = 9$ см.

353 Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведёнными из точки A. Найдите угол BAC, если середина отрезка AO лежит на окружности.

354 На рисунке 162 $OB = 3$ см, $OA = 6$ см. Найдите $\angle 3$ и $\angle 4$.

355 Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите BC, если $\angle OAB = 30°$, $AB = 5$ см.

356 В треугольнике ABC угол B прямой. Докажите, что: а) прямая BC является касательной к окружности с центром A радиуса AB; б) прямая AB является касательной к окружности с центром C радиуса CB; в) прямая AC не является касательной к окружностям с центром B и радиусами BA и BC.

357 Дана окружность с центром в точке O. Прямая пересекает окружность в точках A и H. Найдите расстояние от точки O до прямой, если $AH = 8$ см, $\angle AOH = 90°$.

358 Постройте касательную к данной окружности, параллельную к данной прямой.

359 Постройте касательную к данной окружности, перпендикулярную к данной прямой.

360 Постройте прямоугольный треугольник по данной гипотенузе и проведённой к ней высоте.

361 Постройте прямоугольный треугольник по медиане и высоте, проведённым к гипотенузе.

362 Постройте серединный перпендикуляр к данному отрезку.

Решение

Пусть AB — данный отрезок. Построим две окружности с центрами в точках A и B радиуса AB (рис. 168). Эти окружности пересекаются в двух точках M_1 и M_2. Отрезки AM_1, AM_2, BM_1, BM_2 равны друг другу как радиусы этих окружностей.

Проведём прямую M_1M_2. Она является искомым серединным перпендикуляром к отрезку AB. В самом деле, точки M_1 и M_2 равноудалены от концов отрезка AB, поэтому они лежат на серединном перпендикуляре к этому отрезку. Значит, прямая M_1M_2 и есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

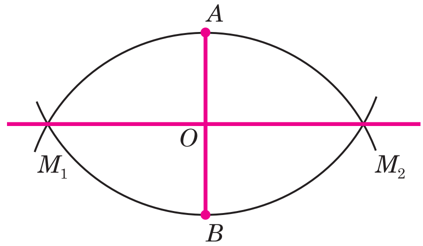


Рис. 168

363 Отметьте три точки, не лежащие на одной прямой, и постройте окружность, проходящую через эти точки.

364 Начертите три треугольника: тупоугольный, прямоугольный и остроугольный. Для каждого из них постройте описанную окружность. Как расположен центр окружности относительно треугольника в каждом случае?

365 Начертите три треугольника: тупоугольный, прямоугольный и остроугольный. В каждый из них впишите окружность. Как расположен центр окружности относительно треугольника в каждом случае?

366 Докажите, что для равностороннего треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

367 Укажите, какие из треугольников, изображённых на рисунке 169, являются вписанными.

368 Укажите, какие из треугольников ABC, CED, LMN и CTS, изображённых на рисунке 170, являются описанными около окружности.

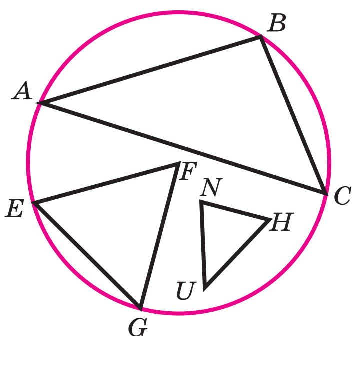


Рис. 169

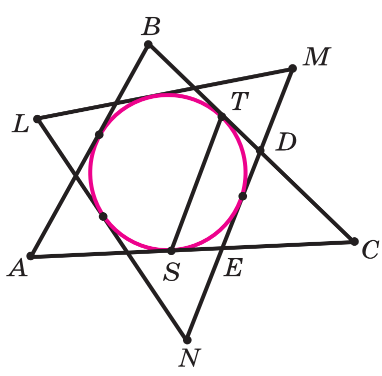


Рис. 170

369 Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

370 Стороны угла BAC, равного $60°$, касаются окружности с центром O. Найдите длину отрезка OA, если радиус окружности равен 5 см.

371 Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 26 см, а радиус вписанной окружности — 4 см.

372 Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если гипотенуза треугольника равна c, а сумма катетов m.

373 В равнобедренный треугольник вписана окружность с центром O, и около него описана окружность с центром E. Докажите, что точки O и E лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

§3 Симметричные фигуры

44. Фигуры, симметричные относительно прямой

Две точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой** a, если эта прямая проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к нему (рис. 171, *а*). Прямая a называется осью симметрии точек A и A_1. Каждая точка оси a симметрична самой себе. На рисунке 171, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно прямой b, а точка P симметрична самой себе относительно этой прямой.

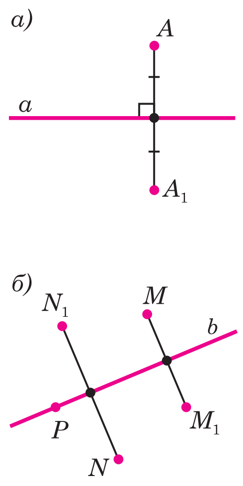


Рис. 171

Фигура называется **симметричной относительно прямой** a, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно прямой a также принадлежит этой фигуре. Прямая a называется **осью симметрии фигуры**. Говорят также, что фигура обладает **осевой симметрией**.

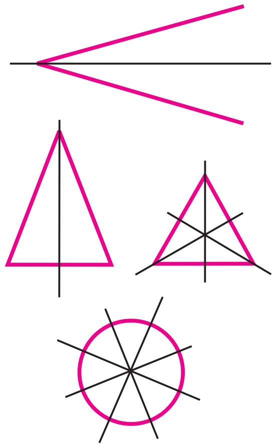
Приведём примеры фигур, обладающих осевой симметрией (рис. 172). У неразвёрнутого угла одна ось симметрии — прямая, на которой расположена биссектриса угла. Равнобедренный (но не равносторонний) треугольник имеет также одну ось симметрии, а равносторонний треугольник — три оси симметрии. У окружности осей симметрии бесконечно много — любая прямая, проходящая через её центр, является осью симметрии. Имеются фигуры, у которых нет ни одной оси симметрии.

Отметим, что ось симметрии точек A и A_1 является серединным перпендикуляром к отрезку AA_1. Напомним, что каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов, поэтому каждая точка оси симметрии двух точек равноудалена от этих точек.

Изображения многих предметов окружающего нас мира имеют ось симметрии. Многие листья деревьев и лепестки цветов симметричны относительно центральной жилки (рис. 173).

С симметрией мы часто встречаемся в искусстве, архитектуре, технике, быту. Так, фасады многих зданий обладают осевой симметрией (рис. 174). В большинстве случаев симметричны относительно оси узоры на коврах, тканях, комнатных обоях. Симметричны многие детали механизмов, например зубчатые колёса.

Две фигуры называются **симметричными относительно прямой**, если каждая точка одной фигуры симметрична некоторой точке другой фигуры, и обратно. Данная прямая называется **осью симметрии** этих фигур.



Фигуры, обладающие осевой симметрией

Рис. 172

Рис. 173

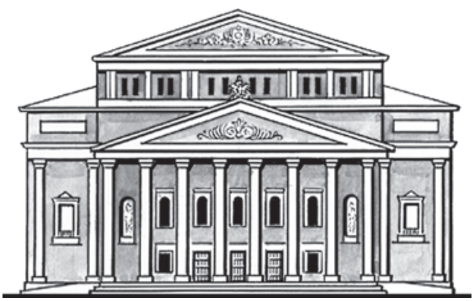


Рис. 174

На рисунке 175 фигуры E и E_1, F и F_1, G и G_1 симметричны относительно прямой p.

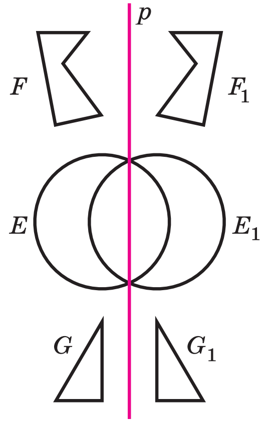


Рис. 175

45. Осевая симметрия и её свойства

Если a — некоторая прямая, то каждой точке A плоскости симметрична относительно прямой a только одна точка A_1 (объясните почему). Говорят, что прямая a задаёт на плоскости **осевую симметрию с осью** $\boldsymbol{a}$.

Если осевая симметрия задана, то для каждой фигуры существует симметричная ей фигура относительно оси a. Позже мы докажем, что отрезку симметричен отрезок, прямой — прямая, треугольнику — равный ему треугольник и т. д.

Рассмотрим некоторые свойства осевой симметрии.

1^0. Если две прямые $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{b_1}$ симметричны относительно оси $\boldsymbol{a}$, то они либо параллельны, либо их точка пересечения лежит на оси симметрии $\boldsymbol{a}$.

Действительно, если прямая b пересекает ось a в точке B, то точка B симметрична самой себе и симметрична какой-либо точке на прямой b_1. Тогда прямая b_1 также пересекает ось a в точке B (рис. 176).

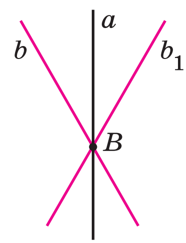


Рис. 176

2^0. Расстояние между точками $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равно расстоянию между симметричными им точками $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{B_1}$.

Пусть A и B — две точки, а A_1 и B_1 — симметричные им точки относительно прямой a (рис. 177, a).

Пусть F — середина отрезка AA_1, E — середина отрезка BB_1. Точки F и E принадлежат оси симметрии a, поэтому треугольник BFB_1 — равнобедренный (объясните почему). Тогда FE — высота и биссектриса, проведённая к его основа-

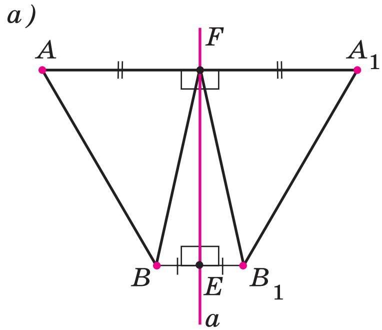
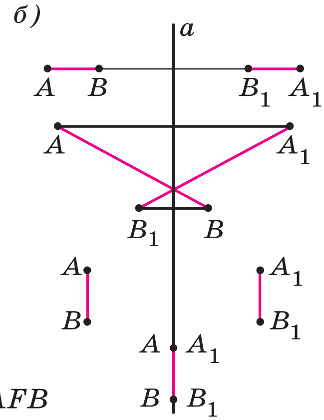


Рис. 177



нию BB_1. Следовательно, в треугольниках AFB и A_1FB_1 $\angle AFB = \angle A_1FB_1$ (объясните почему). Треугольники AFB и A_1FB_1 равны по первому признаку, поэтому их соответственные стороны AB и A_1B_1 равны. Таким образом, расстояние между точками A и B равно расстоянию между симметричными им точками A_1 и B_1, что и требовалось доказать.

Другие случаи расположения точек A, B и A_1, B_1 рассмотрите самостоятельно и убедитесь в том, что $AB = A_1B_1$ (рис. 177, *б*).

В геометрии свойства осевой симметрии часто используются при доказательстве теорем и решении задач.

Существует техника рисования красками (гуашью или акварелью), которая основана на применении осевой симметрии (рис. 178). Она называется **монотипия**. Эта простая техника заключается в том, что рисунок наносится на одну часть листа, потом лист перегибается и рисунок отпечатывается на другой части листа.

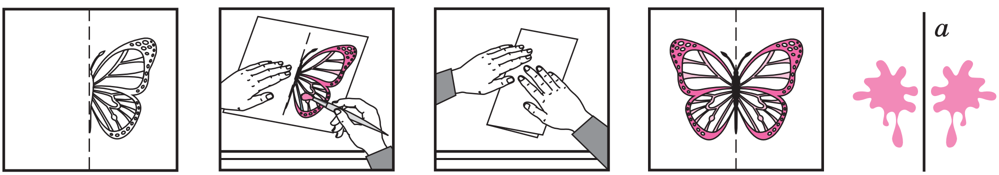


Рис. 178

Практические задания

374 Начертите прямую l. Отметьте точки A и B, не лежащие на этой прямой, и точку C, принадлежащую ей. Постройте точки A_1, B_1, C_1, симметричные данным точкам относительно прямой l. С помощью масштабной линейки сравните длины отрезков AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, BC и B_1C_1.

375 Начертите прямую l. Отметьте точку A, не лежащую на этой прямой. Постройте точку A_1, симметричную точке A, с помощью одного циркуля.

376 Отметьте две точки и постройте их ось симметрии.

377 Даны две точки A и B, симметричные относительно некоторой прямой, и точка M. Постройте точку, симметричную точке M относительно той же прямой.

378 Начертите треугольник ABC и прямую p, не пересекающую его стороны. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно прямой p. Пользуясь масштабной линейкой и транспортиром, убедитесь в том, что стороны и углы треугольника $A_1B_1C_1$ соответственно равны сторонам и углам треугольника ABC. Выполните ещё раз построение для случая, когда прямая p пересекает две стороны треугольника.

379 Начертите следующие фигуры и для каждой из них постройте ось симметрии, если она существует: а) отрезок AB; б) угол hk; в) равнобедренный треугольник; г) разносторонний треугольник; д) равносторонний треугольник.

380 Начертите фигуру, имеющую: а) только одну ось симметрии; б) несколько осей симметрии.

Задачи

381 Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) прямая; в) луч; г) угол?

382 Перенесите в тетрадь таблицу. Нарисуйте примеры фигур с данным числом осей.

Число осей симметрии	Не имеет оси	Одна ось	Две оси	Три оси	Бесконечное число осей
Геометрическая фигура					

383 Какие из следующих букв имеют ось симметрии: А, Б, Г, Е, О, F?

384 Какие из точек M, N, C, Q, S, изображённых на рисунке 179, симметричны относительно прямой p: а) точке A; б) точке B?

385 Могут ли точки A и A_1 быть симметричны относительно прямой p, если расстояния от этих точек до прямой p равны: а) 4 см и 6 см; б) 7 см и 7 см; в) 11,3 см и 11,4 см? Ответ обоснуйте.

386 Точки A_1, B_1, C_1 симметричны точкам A, B, C относительно прямой p. Найдите A_1B_1, если известно, что точка B лежит между точками A и C, $AC = 5$ см, $BC = 3$ см.

387 На рисунке 180, *а* точки A и A_1, B и B_1 симметричны относительно прямой p. Найдите длины отрезков AB и A_1B_1, если $AH = 27{,}3$ см, $B_1H = 7{,}8$ см.

388 На рисунке 180, *б* точки A и A_1, B и B_1 симметричны относительно прямой p. Найдите длины отрезков AB и A_1B_1, если $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 15$ см.

389 Лежат ли точки A_1, B_1, C_1 на одной прямой, если они симметричны точкам A, B, C относительно некоторой прямой и известно, что: а) $AB = 2$ дм, $AC = 10$ дм, $BC = 80$ см; б) $AB = 1{,}1$ см, $B_1C_1 = 5$ см, $CA = 6$ см?

390 На рисунке 181 назовите фигуры, симметричные относительно прямой p.

391 Точки A_1, B_1, C_1 симметричны вершинам треугольника ABC относительно прямой a. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 4{,}5$ см, $BC = 5{,}5$ см, $CA = 8{,}1$ см.

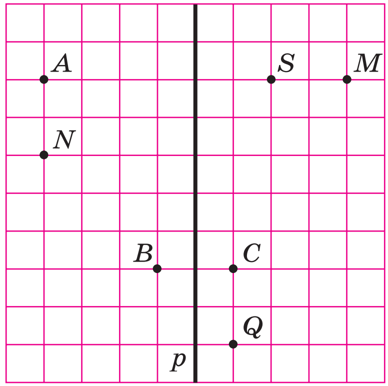


Рис. 179

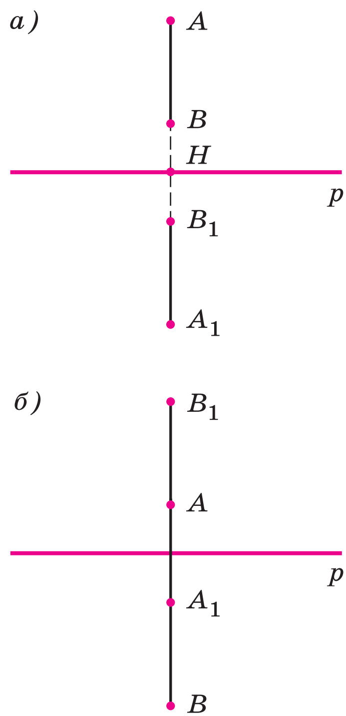


Рис. 180

392 Прямая BO — ось симметрии угла ABC. Треугольник BA_1C_1 симметричен треугольнику ABC относительно прямой BO. Определите длины отрезков A_1C и AC_1, если $BA = 5{,}4$ см, $BC = 35$ мм.

393 Докажите, что если треугольник имеет ось симметрии, то он равнобедренный и осью симметрии является серединный перпендикуляр к основанию.

Решение.
Пусть p — ось симметрии $\triangle ABC$. Так как точки A, B, C не лежат на одной прямой, то хотя бы одна из этих точек не лежит на прямой p. Пусть для определённости точка B не лежит на оси. Ясно, что каждая из вершин A, B, C треугольника ABC симметрична некоторой вершине того же треугольника, поэтому вершина B симметрична либо вершине C, либо вершине A. Пусть, например, B и C симметричны относительно прямой p. В этом случае точка A не может быть симметрична ни точке B, ни точке C, поэтому точка A симметрична самой себе, следовательно, точка A принадлежит прямой p. Таким образом, стороны AB и AC треугольника ABC симметричны относительно прямой p, поэтому $AB = AC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный. Так как точки B и C симметричны относительно прямой p, то осью симметрии треугольника является серединный перпендикуляр к основанию BC.

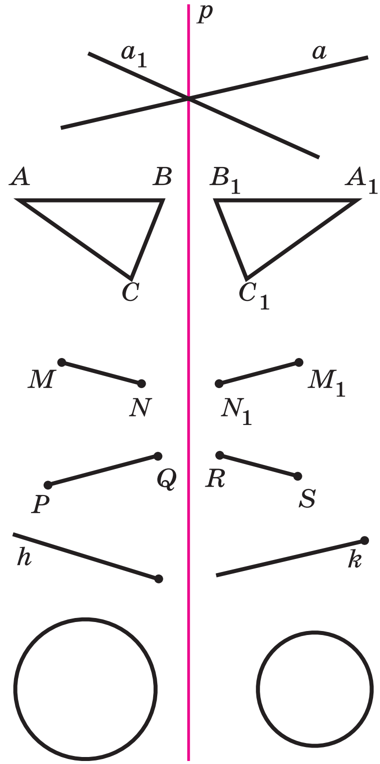


Рис. 181

Вопросы для повторения к главе V

1. Что такое геометрическое место точек? Приведите примеры.
2. Сформулируйте и докажите теорему о биссектрисе угла.
3. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
4. Какая прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку?
5. Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

6 Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

7 Что такое окружность с центром O и радиусом r; хорда окружности; диаметр окружности?

8 Сформулируйте и докажите свойства диаметра окружности.

9 Объясните, что означает: диаметр окружности виден из точки под прямым углом?

10 Может ли окружность пересекать прямую более чем в двух точках? Обоснуйте свой ответ.

11 Какая прямая называется секущей по отношению к окружности?

12 Какая прямая называется касательной к окружности? Какая точка называется точкой касания?

13 Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.

14 Что известно об отрезках касательных к окружности, проведённых из одной точки?

15 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.

16 Объясните, как через данную точку окружности провести касательную к этой окружности.

17 Какой отрезок (луч) называется касательным к окружности?

18 Что значит: окружность вписана в неразвёрнутый угол? Сколько окружностей можно вписать в данный неразвёрнутый угол? Где находятся их центры?

19 Какая окружность называется вписанной в треугольник? Какой треугольник называется описанным около окружности?

20 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в треугольник. Сколько окружностей можно вписать в данный треугольник?

21 Какая окружность называется описанной около треугольника? Какой треугольник называется вписанным в окружность?

22 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника. Сколько окружностей можно описать около данного треугольника?

23 Какие две точки называются симметричными относительно данной прямой?

24 Какая фигура называется симметричной относительно данной прямой?

25 Какие две фигуры называются симметричными относительно данной прямой?

26 Как построить точку, симметричную данной, относительно заданной оси симметрии?

27 Как построить ось симметрии двух данных точек?

28 Если две прямые симметричны относительно некоторой прямой, может ли только одна из них пересекать ось симметрии? Ответ объясните.

29 Будут ли равны расстояния между двумя точками A и B и симметричными им точками A_1 и B_1?

30 Как построить точку, симметричную точке M относительно прямой b: а) с помощью циркуля и линейки; б) с помощью одного циркуля?

Дополнительные задачи

394 Докажите, что касательные, проведённые через концы хорды, не являющейся диаметром окружности, пересекаются.

395 Прямые AB и AC — касательные к окружности с центром O, B и C — точки касания. Через произвольную точку X, взятую на дуге BC, проведена касательная к этой окружности, пересекающая отрезки AB и AC в точках M и N. Докажите, что периметр треугольника AMN и величина угла MON не зависят от выбора точки X на дуге BC.

396* Две окружности имеют общую точку M и общую касательную в этой точке. Прямая AB касается одной окружности в точке A, а другой — в точке B. Докажите, что точка M лежит на окружности с диаметром AB.

397 Отрезок AB является диаметром окружности, а хорды BC и AD параллельны. Докажите, что хорда CD является диаметром.

398 Может ли вершина разностороннего треугольника лежать на серединном перпендикуляре к какой-либо стороне? Ответ обоснуйте.

399 Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане. Докажите, что этот треугольник либо равнобедренный, либо прямоугольный.

400 В равнобедренный треугольник вписана окружность с центром O_1, и около него описана окружность с центром O_2. Докажите, что точки O_1 и O_2 лежат на серединном перпендикуляре к основанию треугольника.

401 Даны прямая a, точка A, лежащая на этой прямой, и точка B, не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой a в точке A.

402 Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.

403 Докажите, что прямые, симметричные двум данным параллельным прямым относительно прямой a, параллельны.

404 Докажите, что прямые, симметричные двум данным перпендикулярным прямым относительно прямой a, перпендикулярны.

405 Докажите, что прямая, содержащая высоту равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, является его осью симметрии.

406 Точка A расположена во внутренней области угла CDE. Точка A_1 симметрична точке A относительно прямой DE, и точка A_2 симметрична точке A относительно прямой DC. Найдите угол CDE, если $\angle A_1DE = 24°$, $\angle A_2DC = 48°$.

407 Докажите, что любая прямая, проходящая через центр окружности, является её осью симметрии.

408 Точка пересечения двух равных хорд принадлежит некоторому диаметру. Докажите, что эти хорды симметричны относительно прямой, содержащей этот диаметр.

409 Докажите, что если треугольник имеет две оси симметрии, то он имеет и третью ось симметрии.

410 Даны три прямые a, b, p. а) Постройте прямую b_1, симметричную прямой b относительно прямой p. б) Пользуясь прямой b_1, постройте отрезок так, чтобы его концы лежали соответственно на прямых a и b и чтобы прямая p была осью симметрии отрезка.

411 Даны прямые a, b и окружность с центром O. а) Постройте прямую a_1, симметричную прямой a относительно прямой b. б) Используя прямую a_1, постройте отрезок так, чтобы прямая b была серединным перпендикуляром к этому отрезку и чтобы концы этого отрезка лежали соответственно на прямой a и данной окружности.

412 Постройте оси симметрии двух пересекающихся прямых.

Задачи повышенной трудности

Задачи к главам I и II

413 Пусть a — число, выражающее длину отрезка AB при единице измерения CD, а b — число, выражающее длину отрезка CD при единице измерения AB. Как связаны между собой числа a и b?

414 Длина отрезка AB при единице измерения E_1F_1 выражается числом m, а при единице измерения E_2F_2 — числом n. Каким числом выражается длина отрезка E_1F_1 при единице измерения E_2F_2?

415 Пусть угол hk — меньший из двух смежных углов hk и hl. Докажите, что

$$\angle hk = 90° - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk),$$

$$\angle hl = 90° + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk).$$

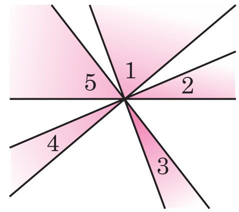


Рис. 182

416 Пять прямых пересекаются в одной точке (рис. 182). Найдите сумму углов 1, 2, 3, 4 и 5.

417 Даны шесть попарно пересекающихся прямых. Известно, что через точку пересечения любых двух прямых проходит по крайней мере ещё одна из данных прямых. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

418 Даны шесть точек. Известно, что прямая, проходящая через любые две точки, содержит по крайней мере ещё одну из данных точек. Докажите, что все эти точки лежат на одной прямой.

419 Точки C_1 и C_2 лежат по разные стороны от прямой AB и расположены так, что $AC_1 = BC_2$ и $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. Докажите, что прямая C_1C_2 проходит через середину отрезка AB.

420 Докажите, что если угол, прилежащая к нему сторона и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны углу, прилежащей к нему стороне и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны.

421 Сторона и два угла одного треугольника равны какой-то стороне и каким-то двум углам другого. Могут ли эти треугольники быть неравными?

422 Две стороны и угол одного треугольника равны каким-то двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть неравными?

423 Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите, что $OC = OD$, если $AC = AO = BO = BD$.

Задачи к главам III и IV

424 Прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC, пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если угол A равен α.

425 Через каждую вершину данного треугольника проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе треугольника, исходящей из этой вершины. Отрезки этих прямых вместе со сторонами данного треугольника образуют три треугольника. Докажите, что углы этих треугольников соответственно равны.

426 В каждом из следующих случаев определите вид треугольника:
а) сумма любых двух углов больше 90°;
б) каждый угол меньше суммы двух других углов.

427 Докажите, что угол треугольника является острым, прямым или тупым, если медиана, проведённая из вершины этого угла, соответственно больше, равна или меньше половины противоположной стороны.

428 Внутри равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята такая точка M, что $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$. Найдите угол AMC, если $\angle BAC = 80°$.

429 Докажите, что любой отрезок с концами на разных сторонах треугольника не больше наибольшей из сторон треугольника.

430 Отрезок BB_1 — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BA > B_1A$ и $BC > B_1C$.

431 Внутри треугольника ABC взята такая точка D, что $AD = AB$. Докажите, что $AC > AB$.

432 В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC, отрезок AD — биссектриса. Докажите, что $\angle ADB > \angle ADC$ и $BD > CD$.

433 Докажите теорему: если в треугольнике биссектриса является медианой, то треугольник равнобедренный.

434 Две стороны треугольника не равны друг другу. Докажите, что медиана, проведённая из их общей вершины, составляет с меньшей из сторон больший угол.

435 В треугольнике ABC стороны AB и AC не равны, отрезок AM соединяет вершину A с произвольной точкой M стороны BC. Докажите, что треугольники AMB и AMC не равны друг другу.

436 Через вершину A треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла A, а из вершины B проведён перпендикуляр BH к этой прямой. Докажите, что периметр треугольника BCH больше периметра треугольника ABC.

437 В треугольнике ABC, где $AB < AC$, отрезок AD — биссектриса, отрезок AH — высота. Докажите, что точка H лежит на луче DB.

438 Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведённых из этой же вершины.

439 Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины, пополам.

440 Медиана и высота треугольника, проведённые из одной вершины угла треугольника, делят этот угол на три равные части. Докажите, что треугольник прямоугольный.

441 В треугольнике ABC высота AA_1 не меньше стороны BC, а высота BB_1 не меньше стороны AC. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный и прямоугольный.

Задачи на построение

Рассмотрим схему, по которой обычно решают задачи на построение циркулем и линейкой. Она состоит из четырёх частей:

1) Отыскание способа решения задачи путём установления связей между искомыми элементами и данными задачи. Эта часть называется **анализом** задачи. Анализ даёт возможность составить план решения задачи на построение.

2) Выполнение **построения** по намеченному плану.

3) **Доказательство** того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи.

4) **Исследование** задачи, т. е. выяснение вопроса о том, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений. В тех случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части, например анализ или исследование, опускаются. Так мы поступали при решении простейших задач на построение. Рассмотрим теперь более сложные задачи.

442 Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне.

Решение

Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 183, *а*). Требуется построить такой треугольник ABC, у которого две стороны, скажем AB и AC, равны соответственно данным отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а высота AH равна отрезку M_3N_3. Проведём решение задачи по описанной схеме.

Анализ

Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 183, *б*). Мы видим, что сторона AB и высота AH являются гипотенузой и катетом прямоугольного треугольника ABH. Поэтому построение треугольника ABC можно провести по такому плану: сначала построить прямоугольный треугольник ABH, а затем достроить его до всего треугольника ABC.

Построение

Строим прямоугольный треугольник ABH, у которого гипотенуза AB равна отрезку M_1N_1, а катет AH равен данному отрезку M_3N_3. Как это сделать, мы знаем (задача **323**, *в*). На рисунке 184, *а* изображён построенный треугольник ABH. Затем проводим окружность радиуса M_2N_2 с центром в точке A. Одну из точек пересечения этой окружности с прямой BH обозначим буквой C. Проведя отрезки BC и AC, получим искомый треугольник ABC (рис. 184, *б*).

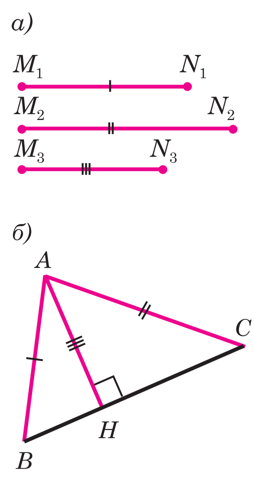


Рис. 183

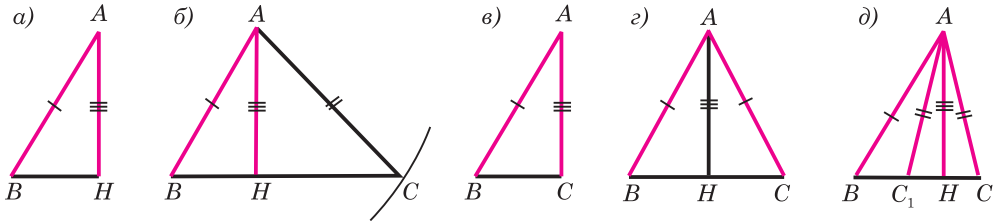


Рис. 184

Доказательство

Треугольник ABC действительно искомый, так как по построению сторона AB равна M_1N_1, сторона AC равна M_2N_2, а высота AH равна M_3N_3, т. е. треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Исследование

Нетрудно сообразить, что задача имеет решение не при любых данных отрезках M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3. В самом деле, если хотя бы один из отрезков M_1N_1 и M_2N_2 меньше M_3N_3, то задача не имеет решения, так как наклонные AB и AC не могут быть меньше перпендикуляра AH. Задача не имеет решения и в том случае, когда $M_1N_1 = M_2N_2 = M_3N_3$ (объясните почему). В остальных случаях задача имеет решение. Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_3N_3$, то задача имеет единственное решение: в этом случае сторона AC совпадает с высотой AH и искомый треугольник является прямоугольным (рис. 184, *в*). Если $M_1N_1 > M_3N_3$, а $M_2N_2 = M_1N_1$, то задача также имеет единственное решение: в этом случае треугольник ABC равнобедренный (рис. 184, *г*). И наконец, если $M_1N_1 > M_3N_3$, $M_2N_2 > M_3N_3$ и $M_1N_1 \neq M_2N_2$, то задача имеет два решения — треугольники ABC и ABC_1 на рисунке 184, *д*.

443 Постройте прямоугольный треугольник ABC, если даны острый угол B и биссектриса BD.

444 Дана окружность с центром O и точка A вне её. Проведите через точку A прямую, пересекающую окружность в точках B и C таких, что $AB = BC$.

445 Постройте треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведённой из вершины другого угла.

446 Постройте треугольник по периметру и двум углам.

Задачи к главе V

447 Даны две точки A и B и прямая a, не проходящая через эти точки. На прямой a постройте точку, равноудалённую от точек A и B. Всегда ли задача имеет решение?

448 Постройте точку, лежащую на данной окружности и равноудалённую от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

449 Через три данные точки проведите окружность. Всегда ли задача имеет решение?

450 На данной окружности постройте точку, равноудалённую от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

451 Даны три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие через одну точку. Постройте точку, равноудалённую от этих прямых. Сколько решений имеет задача?

452 Постройте треугольник по стороне, разности углов при этой стороне и сумме двух других сторон.

453 Даны две равные окружности с центрами O_1 и O_2, имеющие одну общую точку (такие окружности называются **касающимися**). Прямая m является касательной к каждой из них в точках A и B соответственно. Докажите, что отрезок AB равен отрезку O_1O_2.

454 Даны две окружности, не имеющие общих точек. Постройте их общую касательную. Сколько таких касательных можно построить?

455 Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых.

456 Даны прямая m, точка A на прямой m и точка B, не лежащая на этой прямой. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой m в точке A.

457 Даны окружность, прямая m, а также точка A на прямой m. Постройте окружность, касающуюся прямой m в точке A и данной окружности.

458 Даны неразвёрнутый угол и точка на одной из его сторон. Постройте окружность, которая вписана в угол и касается его стороны в данной точке.

459 Даны острый угол и его внутренняя точка A. Постройте на сторонах угла такие точки B и C, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

460 Дан прямоугольный треугольник. Постройте окружность с центром на одном из катетов, которая касается гипотенузы и проходит через вершину прямого угла треугольника.

461 Даны окружность, её внутренняя точка A и отрезок PQ. Постройте хорду KM окружности, проходящую через точку A так, что $AK - AM = PQ$.

Глава VI

Четырёхугольники

До сих пор в центре нашего внимания был самый простой из многоугольников — треугольник. В этой главе будем изучать более сложные многоугольники, в основном различные виды четырёхугольников: параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Кроме того, в этой главе речь пойдёт о центральной симметрии геометрических фигур, в том числе указанных четырёхугольников.

§1 Многоугольники

46. Выпуклый многоугольник

Напомним, что многоугольник с n вершинами называется **n-угольником**; он имеет n сторон. Треугольник имеет три вершины и три стороны, четырёхугольник имеет четыре вершины и четыре стороны.

Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются соседними. Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется **диагональю** многоугольника. У любого многоугольника, имеющего более трёх вершин, есть хотя бы одна диагональ.

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

На рисунке 185 многоугольник F_1 является выпуклым, а многоугольник F_2 — невыпуклым.

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображённый на рисунке 186, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются **углами** этого многоугольника. Найдём их сумму.

Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате полу-

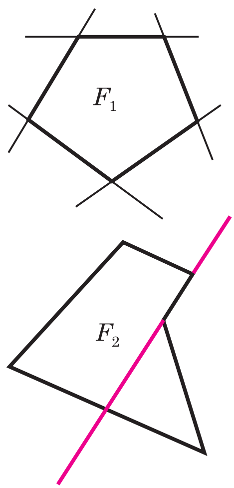


Рис. 185

чим $n-2$ треугольника (рис. 186, *б*), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ равна $(n-2) \cdot 180°$.

Итак, **сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$.**

Внешним углом выпуклого многоугольника называется угол, смежный с углом многоугольника.

Если при каждой вершине выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ взять по одному внешнему углу, то сумма этих внешних углов окажется равной

$$180° - A_1 + 180° - A_2 + \dots + 180° - A_n =$$
$$= n \cdot 180° - (A_1 + A_2 + \dots + A_n) =$$
$$= n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 360°.$$

Таким образом, **сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°.**

Количество диагоналей выпуклого n-угольника находится по формуле $\frac{n(n-3)}{2}$.

Действительно, из каждой вершины выпуклого n-угольника можно провести $n-3$ диагонали. Из всех n вершин можно провести $n(n-3)$ диагоналей, однако при таком подсчёте каждая диагональ учитывается дважды (объясните почему), т. е. мы нашли удвоенное число диагоналей n-угольника. Следовательно, число диагоналей выпуклого n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

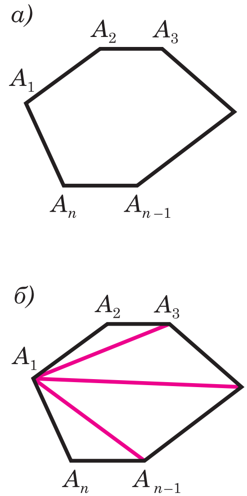


Рис. 186

47. Четырёхугольник

Каждый четырёхугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали (рис. 187). Две несмежные стороны четырёхугольника называются **противоположными**. Две вершины, не являющиеся соседними, называются **противоположными**.

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые. На рисунке 187, *а* изображён выпуклый четырёхугольник, а на рисунке 187, *б* — невыпуклый.

Каждая диагональ выпуклого четырёхугольника разделяет его на два треугольника. Одна из диагоналей невыпуклого четырёхугольника также разделяет его на два треугольника (рис. 187, *б*).

Так как сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$, то **сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°**.

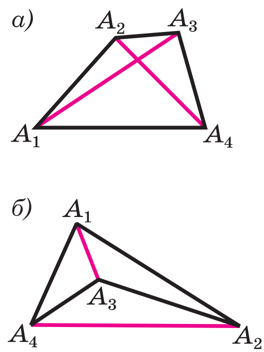


Рис. 187

Задачи

462 Начертите выпуклые пятиугольник и шестиугольник. В каждом многоугольнике из какой-нибудь вершины проведите все диагонали. На сколько треугольников разделяют проведённые диагонали каждый многоугольник?

463 Найдите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) десятиугольника.

464 Найдите количество диагоналей а) выпуклого пятиугольника, б) выпуклого двенадцатиугольника, в) выпуклого двадцатипятиугольника.

465 Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 108°?

466 Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 8 см, а одна сторона больше каждой из других сторон соответственно на 3 мм, 4 мм и 5 мм.

467 Найдите стороны четырёхугольника, если его периметр равен 66 см, первая сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей стороны, а четвёртая — в 3 раза больше второй.

468 Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они равны друг другу.

469 Найдите углы A, B и C выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B = \angle C$, а $\angle D = 135°$.

470 Найдите углы выпуклого четырёхугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

§2 Параллелограмм и трапеция

48. Параллелограмм

Определение

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

На рисунке 188 изображён параллелограмм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$. Параллелограмм является выпуклым четырёхугольником (см. задачу **478** на с. 127).

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

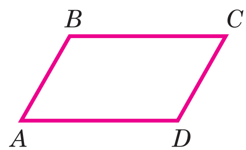


Рис. 188

1⁰. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 189). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому

$$AB = CD,\ AD = BC \text{ и } \angle B = \angle D.$$

Далее, пользуясь равенствами углов 1 и 2, 3 и 4, получаем

$$\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C.$$

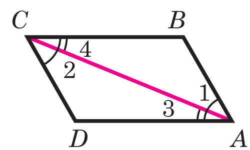


Рис. 189

2⁰. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Пусть O — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 190). Треугольники AOB и COD равны по стороне и двум прилежащим углам ($AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$

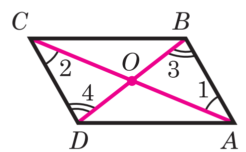
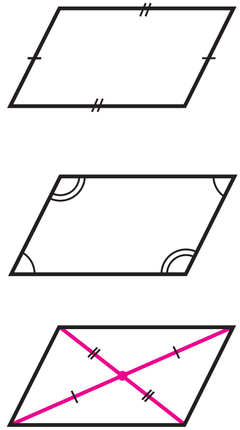


Рис. 190

как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и BD соответственно). Поэтому $AO = OC$ и $OB = OD$, что и требовалось доказать.

Рисунок 191 иллюстрирует все рассмотренные свойства.



Свойства параллелограмма

Рис. 191

49. Признаки параллелограмма

Рассмотрим три признака параллелограмма.

1⁰. Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны и $AB = CD$ (см. рис. 189).

Проведём диагональ AC, разделяющую данный четырёхугольник на два треугольника: ABC и CDA. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними (AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $\angle 3 = \angle 4$. Но углы 3 и 4 накрест лежащие при пересечении прямых AD и BC секущей AC, следовательно, $AD \parallel BC$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны, а значит, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2⁰. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Проведём диагональ AC данного четырёхугольника $ABCD$, разделяющую его на треугольники ABC и CDA (рис. 189). Эти треугольники равны по трём сторонам (AC — общая сторона, $AB = CD$ и $BC = DA$ по условию), поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Отсюда следует, что $AB \parallel CD$. Так как $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то по признаку 1^0 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

3^0. Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам (см. рис. 190). Треугольники AOB и COD равны по первому признаку равенства треугольников ($AO = OC$, $BO = OD$ по условию, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные углы), поэтому $AB = CD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Из равенства углов 1 и 2 следует, что $AB \parallel CD$.

Итак, в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, значит, по признаку 1^0 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

50. Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её **основаниями**, а две другие стороны — **боковыми сторонами** (рис. 192).

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны (рис. 193, *а*).

Трапеция, один из углов которой прямой, называется **прямоугольной** (рис. 193, *б*).

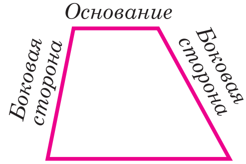
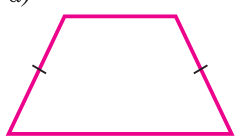


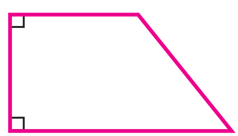
Рис. 192

а)



Равнобедренная трапеция

б)



Прямоугольная трапеция

Рис. 193

Задачи

471 Докажите, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.

472 Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если:
а) одна сторона на 3 см больше другой;
б) разность двух сторон равна 7 см;
в) одна из сторон в 2 раза больше другой.

473 Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, $\angle C = 30°$, а перпендикуляр BH к прямой CD равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

474 Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр этого параллелограмма, если $BK = 15$ см, $KC = 9$ см.

475 Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

476 Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если:
а) $\angle A = 84°$; б) $\angle A - \angle B = 55°$; в) $\angle A + \angle C = 142°$; г) $\angle A = 2\angle B$; д) $\angle CAD = 16°$, $\angle ACD = 37°$.

477 В параллелограмме $MNPQ$ проведён перпендикуляр NH к прямой MQ, причём точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH = 3$ см, $HQ = 5$ см, $\angle MNH = 30°$.

478 Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.

Решение

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 188) и докажем, что он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. Возьмём, например, прямую AB. Отрезок CD не имеет общих точек с прямой AB, так как $AB \parallel CD$. Значит, этот отрезок лежит по одну сторону от прямой AB. Но тогда и отрезки BC и AD лежат по ту же сторону от прямой AB. Таким образом, параллелограмм $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой AB.

479 Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$, у которого $AB \neq BC$ и угол A острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $BMDK$ — параллелограмм.

480 На сторонах AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что $AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

481 На рисунке 194 изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB, длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колёс, передаёт движение от одного колеса к другому. Докажите, что отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

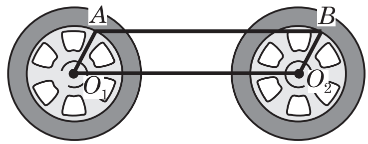


Рис. 194

482 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD, — параллелограмм.

483 На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB = QD$. Докажите, что четырёхугольник $APCQ$ — параллелограмм.

484 ***Средней линией треугольника*** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Докажите свойства средней линии треугольника: средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

485 Докажите признак средней линии треугольника. Через середину M стороны AB треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне BC. Эта прямая пересекает сторону AC в точке N. Докажите, что MN — средняя линия треугольника ABC.

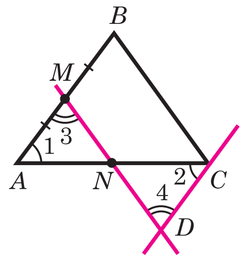


Рис. 195

Решение

Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AB, и обозначим буквой D точку пересечения этой прямой с прямой MN (рис. 195). Так как $AM = MB$ по условию, а $MB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма $BCDM$, то $AM = DC$. Треугольники AMN и CDN равны по второму признаку равенства треугольников ($AM = CD$, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущими AC и MD), поэтому $AN = NC$. Получаем, что по определению отрезок MN является средней линией треугольника ABC.

486 Докажите, что середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма **(теорема Вариньона)**.

487 Диагональ равнобедренной трапеции равна a. Найдите периметр четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон равнобедренной трапеции.

488 Докажите **теорему Фалеса**[1]: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

[1] Фалес Милетский — древнегреческий учёный (ок. 625—547 гг. до н. э.).

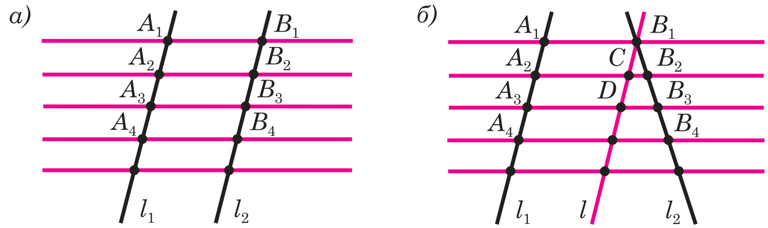


Рис. 196

Решение

Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 196). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу.

Докажем, например, что $B_1B_2 = B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 196, *а*). Тогда $A_1A_2 = B_1B_2$ и $A_2A_3 = B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то и $B_1B_2 = B_2B_3$.

Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведём прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 196, *б*). Она пересечёт прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то по доказанному $B_1C = CD$. Отсюда получаем: $B_1B_2 = B_2B_3$ (задача **485**). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д.

489 ***Средней линией трапеции*** называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. Докажите свойство средней линии трапеции: средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

490 Найдите углы B и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$.

491 Докажите свойства равнобедренной трапеции: а) в равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны; б) в равнобедренной трапеции диагонали равны.

492 Докажите признаки равнобедренной трапеции. Трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны.

493 Один из углов равнобедренной трапеции равен 68°. Найдите остальные углы трапеции.

494 Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

495 Основания прямоугольной трапеции равны a и b, один из углов равен α. Найдите: а) большую боковую сторону трапеции, если $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\alpha = 60°$; б) меньшую боковую сторону трапеции, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45°$.

496 Постройте параллелограмм: а) по двум смежным сторонам и углу между ними; б) по двум диагоналям и углу между ними; в) по двум смежным сторонам и соединяющей их концы диагонали.

Решение

в) Даны три отрезка M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 (рис. 197, *а*). Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого смежные стороны, скажем AB и AD, равны соответственно отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3.

Анализ

Допустим, что искомый параллелограмм $ABCD$ построен (рис. 197, *б*). Мы видим, что стороны треугольника ABD равны данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3. Это обстоятельство подсказывает следующий путь решения задачи: сначала нужно построить по трём сторонам треугольник ABD, а затем достроить его до параллелограмма $ABCD$.

Построение

Строим треугольник ABD так, чтобы его стороны AB, AD и BD равнялись соответственно отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 (как это сделать, мы знаем из курса 7 класса). Затем построим прямую, проходящую через точку B параллельно AD, и вторую прямую, проходящую через точку D параллельно AB (как это сделать, мы также знаем из курса 7 класса). Точку пересечения этих прямых обозначим буквой C (рис. 197, *в*). Четырёхугольник $ABCD$ и есть искомый параллелограмм.

Доказательство

По построению $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, поэтому $ABCD$ — параллелограмм. Смежные стороны параллелограмма $ABCD$ по построению равны отрезкам M_1N_1 и M_2N_2, а диагональ BD равна отрезку M_3N_3, т. е. параллелограмм $ABCD$ — искомый.

Исследование

Ясно, что если по трём данным отрезкам M_1N_1, M_2N_2 и M_3N_3 можно построить треугольник ABD, стороны которого равны этим отрезкам, то можно построить и параллелограмм $ABCD$. Но треугольник ABD можно построить не всегда. Если какой-

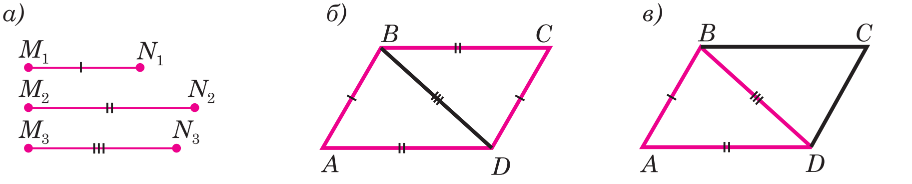


Рис. 197

то из трёх данных отрезков больше или равен сумме двух других, то треугольник ABD, а значит, и параллелограмм $ABCD$ построить нельзя. Попробуйте самостоятельно доказать, что если задача имеет решение, то это решение единственно (см. п. 38).

497 Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм так, чтобы три его вершины совпадали с данными точками. Сколько таких параллелограммов можно построить?

498 Даны острый угол hk и два отрезка P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы расстояние между параллельными прямыми AB и DC равнялось P_1Q_1, $AB = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

499 Разделите данный отрезок AB на n равных частей.

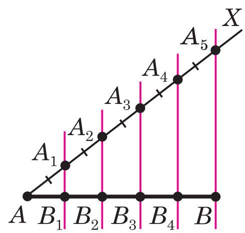


Рис. 198

Решение

Проведём луч AX, не лежащий на прямой AB, и на нём от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, ..., $A_{n-1}A_n$ (рис. 198), т. е. столько равных отрезков, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (на рисунке 198 $n = 5$). Проведём прямую A_nB (точка A_n — конец последнего отрезка) и построим прямые, проходящие через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} и параллельные прямой A_nB. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, которые по теореме Фалеса (задача **488** на с. 128) делят отрезок AB на n равных частей.

500 Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$:
а) по основанию AD, углу A и боковой стороне AB;
б) по основанию BC, боковой стороне AB и диагонали BD.

501 Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ по основаниям и боковой стороне AD, перпендикулярной к основаниям.

§3 Прямоугольник, ромб, квадрат

51. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые. Так как прямоугольник является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма:

в прямоугольнике противоположные стороны равны, а диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Рассмотрим особое свойство прямоугольника.

Диагонали прямоугольника равны.

Действительно, обратимся к рисунку 199, на котором изображён прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны по двум катетам ($CD=BA$, AD — общий катет). Отсюда следует, что гипотенузы этих треугольников равны, т. е. $AC=BD$, что и требовалось доказать.

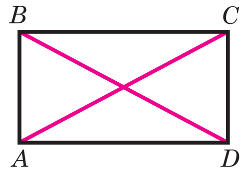


Рис. 199

Докажем обратное утверждение (признак прямоугольника).

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны (рис. 199). Треугольники ABD и DCA равны по трём сторонам ($AB=DC$, $BD=CA$, AD — общая сторона). Отсюда следует, что $\angle A=\angle D$. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle A=\angle C$ и $\angle B=\angle D$. Таким образом, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D$. Параллелограмм — выпуклый четырёхугольник, поэтому $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$. Следовательно, $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$, т. е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником.

52. Ромб и квадрат

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Наряду с ними ромб обладает особым свойством. Рассмотрим его.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

Рассмотрим ромб $ABCD$ (рис. 200). Требуется доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и каждая диагональ делит соответствующие углы ромба пополам. Докажем, например, что $\angle BAC = \angle DAC$.

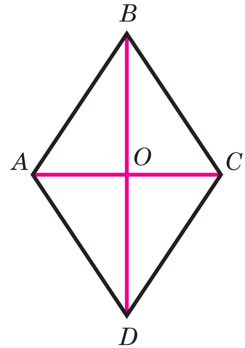
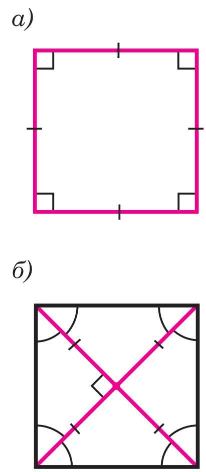


Рис. 200

По определению ромба все его стороны равны, в частности $AB = AD$, поэтому треугольник BAD равнобедренный. Так как ромб является параллелограммом, то его диагонали точкой O пересечения делятся пополам. Следовательно, отрезок AO — медиана равнобедренного треугольника BAD, проведённая к основанию, а значит, высота и биссектриса этого треугольника. Поэтому $AC \perp BD$ и $\angle BAC = \angle DAC$, что и требовалось доказать.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Прямоугольник является параллелограммом, поэтому и квадрат является параллелограммом, у которого все стороны равны, т. е. ромбом. Отсюда следует, что квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Сформулируем основные свойства квадрата.



Свойства квадрата

Рис. 201

1. Все углы квадрата прямые (рис. 201, *а*).
2. Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам (рис. 201, *б*).

53. Центральная симметрии

С осевой симметрией и её свойствами вы познакомились в 7 классе. Рассмотрим ещё один вид симметрии — центральную симметрию.

Две точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки** O, если O — середина отрезка AA_1 (рис. 202, *а*). Точка O считается симметричной самой себе. На рисунке 202, *б* точки M и M_1, N и N_1 симметричны относительно точки O, а точки P и Q не симметричны относительно этой точки (так как отрезки OQ и OP не равны).

Фигура называется симметричной относительно точки O, если для каждой точки фигуры симметричная ей точка относительно точки O также принадлежит этой фигуре. Точка O называется **центром симметрии фигуры.** Говорят также, что фигура обладает центральной симметрией.

Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм (рис. 203). Центром симметрии окружности является центр окружности, а центром симметрии параллелограмма — точка пересечения его диагоналей. Прямая также обладает центральной симметрией, однако в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии (точка O на рисунке 203), у прямой их бесконечно много — любая точка прямой является её центром симметрии. Примером фигуры, не имеющей центра симметрии, является произвольный треугольник.

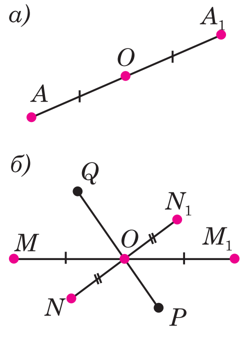
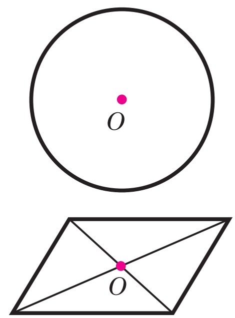


Рис. 202



Фигуры, обладающие центральной симметрией

Рис. 203

Задачи

502 Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

503 Докажите, что если в четырёхугольнике все углы прямые, то четырёхугольник — прямоугольник.

504 Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла A делит сторону: а) BC на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) DC на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм.

505 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

506 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOB, если $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см.

507 В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

508 Найдите периметр ромба $ABCD$, в котором $\angle B = 60°$, $AC = 10{,}5$ см.

509 Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен 45°.

510 Докажите признаки ромба. Параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ делит его угол пополам.

511 Докажите признак квадрата. Ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

512 Является ли четырёхугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?

513 В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырёхугольник — квадрат.

514 Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, катетом $AC = 12$ см и квадрат $CDEF$, такой, что две его стороны лежат на катетах, а вершина E — на гипотенузе треугольника. Найдите периметр квадрата.

515 Постройте прямоугольник: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями.

516 Постройте ромб: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу.

517 Постройте квадрат: а) по стороне; б) по диагонали.

518 Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

519 Даны точки A, B и M. Постройте точку, симметричную точке M относительно середины отрезка AB.

Вопросы для повторения к главе VI

1 Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.

2 Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n-угольника.

3 Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

4 Начертите четырёхугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные вершины.

5 Чему равна сумма углов выпуклого четырёхугольника?

6 Дайте определение параллелограмма. Является ли параллелограмм выпуклым четырёхугольником?

7 Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.

8 Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

9 Сформулируйте и докажите утверждения о признаках параллелограмма.

10 Какой четырёхугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции?

11 Какая трапеция называется равнобедренной; прямоугольной?

12 Какой четырёхугольник называется прямоугольником?

13 Докажите, что диагонали прямоугольника равны.

14 Докажите, что если в параллелограмме диагонали равны, то параллелограмм является прямоугольником.

15 Какой четырёхугольник называется ромбом?

16 Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.

17 Какой четырёхугольник называется квадратом? Перечислите основные свойства квадрата.

18 Сформулируйте и докажите утверждения о признаках квадрата.

19 Сформулируйте и докажите утверждения о признаках ромба.

20 Какие две точки называются симметричными относительно данной точки?

21 Какая фигура называется симметричной относительно данной точки?

22 Приведите примеры фигур, обладающих:
а) осевой симметрией;
б) центральной симметрией;
в) и осевой, и центральной симметрией.

Дополнительные задачи

520 Докажите, что если не все углы выпуклого четырёхугольника равны друг другу, то хотя бы один из них тупой.

521 Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 46 см, $AB = 14$ см. Какую сторону параллелограмма пересекает биссектриса угла A? Найдите отрезки, которые образуются при этом пересечении.

522 Стороны параллелограмма равны 10 см и 3 см. Биссектрисы двух углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка. Найдите эти отрезки.

523 Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные боковым сторонам треугольника. Докажите, что периметр получившегося четырёхугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

524 В параллелограмме, смежные стороны которого не равны, проведены биссектрисы углов. Докажите, что при их пересечении образуется прямоугольник.

525 Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если сумма углов, прилежащих к каждой из двух смежных сторон, равна 180°.

526 Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом, если его противоположные углы попарно равны.

527 Точка K — середина медианы AM треугольника ABC. Прямая BK пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AD = \frac{1}{3}AC$.

528 Точки M и N — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AN и MC делят диагональ BD на три равные части.

529 Из вершины B ромба $ABCD$ проведены перпендикуляры BK и BM к прямым AD и DC. Докажите, что луч BD является биссектрисой угла KBM.

530 Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

531 Докажите, что середина отрезка, соединяющего вершину треугольника с любой точкой противоположной стороны, лежит на отрезке с концами в серединах двух других сторон.

532 Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 18,4 см. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная к прямой AC, пересекает прямые BC и CD соответственно в точках M и N. Найдите MN.

533 На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $AM = AB$. Через точку M проведена прямая, перпендикулярная к прямой AC и пересекающая BC в точке H. Докажите, что $BH = HM = MC$.

534 В трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AD диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD, $\angle BAC = \angle CAD$. Найдите AD, если периметр трапеции равен 20 см, а $\angle D = 60°$.

535* Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

536* На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в 2 раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

537 Докажите, что прямые, содержащие диагонали ромба, являются его осями симметрии.

538 Докажите, что точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.

539 Сколько центров симметрии имеет пара параллельных прямых?

540* Докажите, что если фигура имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то точка их пересечения является центром симметрии фигуры.

Глава VII

Площадь

Что такое площадь комнаты и как её вычислить, если пол в комнате имеет форму прямоугольника, понятно каждому. В этой главе речь пойдёт об измерении площадей многоугольников и будут выведены формулы, по которым можно вычислить площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции. Эти формулы нужны не только в геометрии, но и в практической деятельности. Кроме того, используя формулы площадей, мы докажем одну из важнейших и самых знаменитых теорем геометрии — теорему Пифагора.

§1 Площадь многоугольника

54. Понятие площади многоугольника

Понятие площади нам известно из повседневного опыта. Каждый понимает смысл слов: площадь комнаты равна шестнадцати квадратным метрам, площадь садового участка — восьми соткам и т. д. В этой главе мы рассмотрим вопрос о площадях многоугольников.

Можно сказать, что площадь многоугольника — это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник. Измерение площадей проводится с помощью выбранной единицы измерения аналогично измерению длин отрезков. За единицу измерения площадей принимают квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков. Так, если за единицу измерения отрезков принят сантиметр, то за единицу измерения площадей принимают квадрат со стороной 1 см. Такой квадрат называется **квадратным сантиметром** и обозначается см^2. Аналогично определяется **квадратный метр** (м^2), **квадратный миллиметр** (мм^2) и т. д.

При выбранной единице измерения площадей площадь каждого многоугольника выражается положительным числом. Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в данном многоугольнике. Рассмотрим примеры. На рисунке 204, *а* изображён прямоугольник, в котором квадратный сантиметр укладывается ровно 6 раз. Это означает, что площадь прямоугольника равна 6 см^2.

В трапеции $ABCD$, изображённой на рисунке 204, *б*, квадратный сантиметр укладывается 2 раза и остаётся часть трапеции — треугольник CDE, в котором квадратный сантиметр не укладывается целиком. Для измерения площади этого треугольника нужно использовать доли квадратного сантиметра, например квадратный миллиметр. Он составляет 0,01 часть квадратного сантиметра. Это показано на рисунке 204, *в*, где квадратный сантиметр разбит на 100 квадратных миллиметров (этот рисунок, а также рисунок 204, *г* для большей наглядности даны в увеличенном масштабе).

На рисунке 204, *г* видно, что квадратный миллиметр укладывается в треугольнике CDE 14 раз и остаётся часть этого треугольника (она закрашена на рисунке), в которой квадратный миллиметр не укладывается целиком. Поэтому можно сказать, что площадь трапеции $ABCD$ приближённо равна 2,14 см^2.

Оставшуюся часть треугольника CDE можно измерить с помощью более мелкой доли квадратного сантиметра и получить более точное значение площади трапеции.

Описанный процесс измерения можно продолжить далее, однако на практике он неудобен.

Обычно измеряют лишь некоторые связанные с многоугольником отрезки, а затем вычисляют площадь по определённым формулам.

Вывод этих формул основан на свойствах площадей, которые мы сейчас рассмотрим.

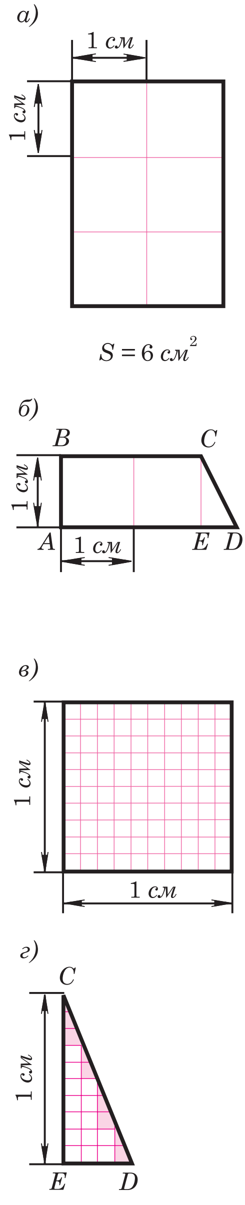


Рис. 204

Прежде всего отметим, что если два многоугольника равны, то единица измерения площадей и её части укладываются в таких многоугольниках одинаковое число раз, т. е. имеет место следующее свойство:

1⁰. Равные многоугольники имеют равные площади.

Далее, пусть многоугольник составлен из нескольких многоугольников так, что внутренние области любых двух из этих многоугольников не имеют общих точек, как показано на рисунке 205. Очевидно, величина части плоскости, занимаемой всем многоугольником, является суммой величин тех частей плоскости, которые занимают составляющие его многоугольники. Итак:

2⁰. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

Свойства 1⁰ и 2⁰ называют **основными свойствами площадей.** Напомним, что аналогичными свойствами обладают длины отрезков.

Наряду с этими свойствами нам понадобится ещё одно свойство площадей.

3⁰. Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Краткую формулировку этого свойства следует понимать так: если сторона квадрата при выбранной единице измерения отрезков выражается числом a, то площадь этого квадрата выражается числом a^2.

На рисунке 206 изображён квадрат, сторона которого равна 2,1 см. Он состоит из четырёх квадратных сантиметров и сорока одного квадратного миллиметра. Таким образом, площадь квадрата равна 4,41 см^2, что равно квадрату его стороны: $4{,}41 = (2{,}1)^2$. Доказательство утверждения 3⁰ приведено в следующем пункте.

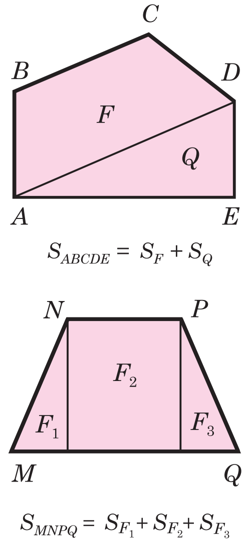
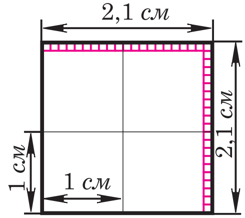


Рис. 205



$S = (2{,}1\ см)^2 = 4{,}41\ см^2$

Рис. 206

Если площади двух многоугольников равны, то эти многоугольники называются **равновеликими**. Если один многоугольник разрезан на несколько многоугольников и из них составлен другой многоугольник, то такие многоугольники называются **равносоставленными**. Например, прямоугольник со сторонами, равными 2 см и 3 см (см. рис. 204, *а*), равносоставлен с прямоугольником со сторонами, равными 1 см и 6 см. Ясно, что любые два равносоставленных многоугольника равновеликие (см. основные свойства площадей). Оказывается, что верно и обратное утверждение: если два многоугольника равновеликие, то они равносоставленные. Это утверждение называется теоремой Бойяи—Гервина. Венгерский математик Ф. Бойяи доказал эту теорему в 1832 г., а немецкий математик-любитель П. Гервин независимо от Ф. Бойяи доказал её в 1833 г.

55*. Площадь квадрата

Докажем, что площадь S квадрата со стороной a равна a^2.

Начнём с того случая, когда $a = \frac{1}{n}$, где n — целое число. Возьмём квадрат со стороной 1 и разобьём его на n^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 207, *а* (на этом рисунке $n = 5$). Так как площадь большого квадрата равна 1, то площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Сторона каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n}$, т. е. равна a. Итак,

$$S = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = a^2. \qquad (1)$$

Пусть теперь число a представляет собой конечную десятичную дробь, содержащую n знаков после запятой (в частности, число a может быть целым, и тогда $n = 0$). Тогда число $m = a \cdot 10^n$

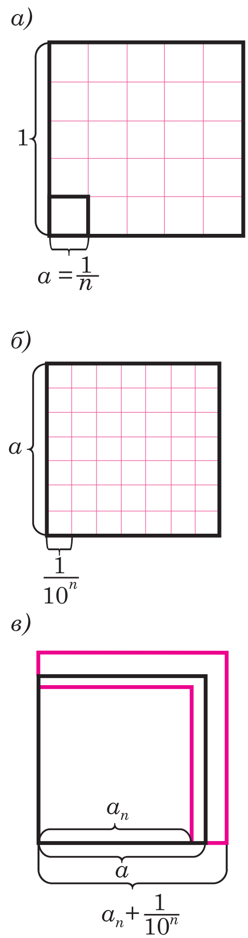


Рис. 207

целое. Разобьём данный квадрат со стороной a на m^2 равных квадратов так, как показано на рисунке 207, *б* (на этом рисунке $m = 7$).

При этом каждая сторона данного квадрата разобьётся на m равных частей, и, значит, сторона любого маленького квадрата равна

$$\frac{a}{m} = \frac{a}{a \cdot 10^n} = \frac{1}{10^n}.$$

По формуле (1) площадь маленького квадрата равна $\left(\frac{1}{10^n}\right)^2$. Следовательно, площадь S данного квадрата равна

$$m^2 \cdot \left(\frac{1}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{m}{10^n}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot 10^n}{10^n}\right)^2 = a^2.$$

Наконец, пусть число a представляет собой бесконечную десятичную дробь. Рассмотрим число a_n, получаемое из a отбрасыванием всех десятичных знаков после запятой, начиная с $(n+1)$-го. Так как число a отличается от a_n не более чем на $\frac{1}{10^n}$, то $a_n \leqslant a \leqslant a_n + \frac{1}{10^n}$, откуда

$$a_n^2 \leqslant a^2 \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (2)$$

Ясно, что площадь S данного квадрата заключена между площадью квадрата со стороной a_n и площадью квадрата со стороной $a_n + \frac{1}{10^n}$ (рис. 207, *в*), т. е. между a_n^2 и $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$:

$$a_n^2 \leqslant S \leqslant \left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2. \qquad (3)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. Тогда число $\frac{1}{10^n}$ будет становиться сколь угодно малым, и, значит, число $\left(a_n + \frac{1}{10^n}\right)^2$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $a_n{}^2$. Поэтому из неравенств (2) и (3) следует, что число S сколь угодно мало отличается от числа a^2. Следовательно, эти числа равны: $S = a^2$, что и требовалось доказать.

56. Площадь прямоугольника

Теорема

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a, b и площадью S (рис. 208, *а*). Докажем, что $S = ab$.

Достроим прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$, как показано на рисунке 208, *б*. По свойству 3^0 площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$.

С другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с площадью S, равного ему прямоугольника с площадью S (свойство 1^0 площадей) и двух квадратов с площадями a^2 и b^2 (свойство 3^0 площадей). По свойству 2^0 имеем:

$$(a + b)^2 = S + S + a^2 + b^2,$$

$$\text{или } a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2.$$

Отсюда получаем: $S = ab$.

Теорема доказана.

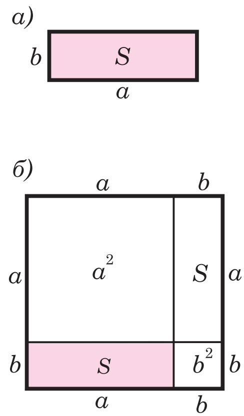


Рис. 208

Задачи

541 Вырежите из бумаги два равных прямоугольных треугольника и составьте из них: а) равнобедренный треугольник; б) прямоугольник; в) параллелограмм, отличный от прямоугольника. Сравните площади полученных фигур.

542 Начертите квадрат и примите его за единицу измерения площадей. Далее начертите: а) квадрат, площадь которого выражается числом 4; б) прямоугольник, отличный от квадрата, площадь которого выражается числом 4; в) треугольник, площадь которого выражается числом 2.

543 Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M, симметричную точке D относительно точки C. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

544 На стороне AD прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ADE так, что его стороны AE и DE пересекают отрезок BC в точках M и N, причём точка M — середина отрезка AE. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

545 Найдите площадь квадрата, если его сторона равна: а) 1,2 см; б) $\frac{3}{4}$ дм; в) $3\sqrt{2}$ м.

546 Найдите сторону квадрата, если его площадь равна: а) 16 см^2; б) 2,25 дм^2; в) 12 м^2.

547 Площадь квадрата равна 24 см^2. Выразите площадь этого квадрата: а) в квадратных миллиметрах; б) в квадратных дециметрах.

548 Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Вычислите: а) S, если $a = 8{,}5$ см, $b = 3{,}2$ см; б) S, если $a = 2\sqrt{2}$ см, $b = 3$ см; в) b, если $a = 32$ см, $S = 684{,}8$ см^2; г) a, если $b = 4{,}5$ см, $S = 12{,}15$ см^2.

549 Как изменится площадь прямоугольника, если: а) одну пару противоположных сторон увеличить в 2 раза; б) каждую сторону увеличить в 2 раза; в) одну пару противоположных сторон увеличить в 2 раза, а другую — уменьшить в 2 раза?

550 Найдите стороны прямоугольника, если: а) его площадь равна 250 см^2, а одна сторона в 2,5 раза больше другой; б) его площадь равна 9 м^2, а периметр равен 12 м.

551 Пол комнаты, имеющий форму прямоугольника со сторонами 5,5 м и 6 м, нужно покрыть паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета равна 30 см, а ширина — 5 см. Сколько потребуется таких дощечек для покрытия пола?

552 Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 15 см, чтобы облицевать ими стену, имеющую форму прямоугольника со сторонами 3 м и 2,7 м?

553 Найдите сторону квадрата, площадь которого равна площади прямоугольника со смежными сторонами 8 м и 18 м.

554 Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины. Первый участок имеет форму прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м, а второй имеет форму квадрата. Площадь какого участка больше и на сколько?

§2 Площади параллелограмма, треугольника и трапеции

57. Площадь параллелограмма

Условимся одну из сторон параллелограмма называть **основанием**, а перпендикуляр, проведённый из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание, — **высотой параллелограмма**.

Теорема

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Доказательство

Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ с площадью S. Примем сторону AD за основание и проведём высоты BH и CK (рис. 209, *а*). Докажем, что $S = AD \cdot BH$.

Рассмотрим возможные случаи расположения точки H на прямой AD.

1. Основание H высоты BH может лежать на стороне AD (рис. 209, *а*).

2. Основание H высоты BH может совпадать с точкой A, тогда исходный параллелограмм является прямоугольником и утверждение верно.

3. Основание H высоты BH может совпадать с вершиной D (рис. 209, *б*).

4. Основание H высоты BH может лежать на прямой AD, вне отрезка AD (рис. 209, *в*).

Рассмотрим первый случай.

Докажем сначала, что площадь прямоугольника $HBCK$ также равна S. Трапеция $ABCK$ составлена из параллелограмма $ABCD$ и треугольника DCK. С другой стороны, она составлена из прямоугольника $HBCK$ и треугольника ABH. Но прямоугольные треугольники DCK и ABH равны по гипотенузе и острому углу (их гипотенузы AB и CD равны как противопо-

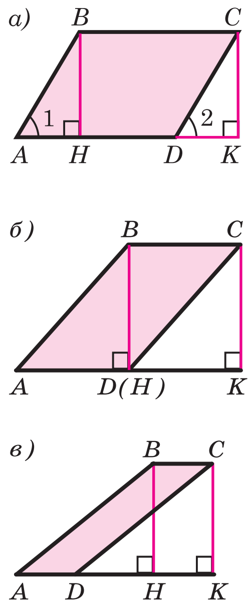


Рис. 209

ложные стороны параллелограмма, а углы 1 и 2 равны как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD), поэтому их площади равны.

Следовательно, площади параллелограмма $ABCD$ и прямоугольника $HBCK$ также равны, т. е. площадь прямоугольника $HBCK$ равна S. По теореме о площади прямоугольника $S = BC \cdot BH$, а так как $BC = AD$, то $S = AD \cdot BH$. В остальных случаях (рис. 209, *б*, *в*) проведите доказательство самостоятельно.

Теорема доказана.

58. Площадь треугольника

Одну из сторон треугольника часто называют его **основанием**. Если основание выбрано, то под словом «высота» подразумевают высоту треугольника, проведённую к основанию.

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Доказательство

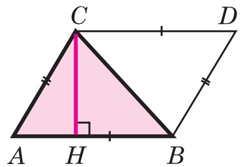


Рис. 210

Пусть S — площадь треугольника ABC (рис. 210). Примем сторону AB за основание треугольника и проведём высоту CH. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot CH.$$

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ так, как показано на рисунке 210. Треугольники ABC и DCB равны по трём сторонам (BC — их общая сторона, $AB = CD$ и $AC = BD$ как противоположные стороны параллелограмма $ABDC$), поэтому их площади равны. Следовательно, площадь S треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABDC$, т. е. $S = \frac{1}{2} AB \cdot CH$.

Теорема доказана.

Следствие 1

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Следствие 2

Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Воспользуемся следствием 2 для доказательства теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Теорема

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Доказательство

Пусть S и S_1 — площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$ (рис. 211, *а*). Докажем, что

$$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 совместилась с вершиной A, а стороны A_1B_1 и A_1C_1 наложились соответственно на лучи AB и AC (рис. 211, *б*). Треугольники ABC и AB_1C имеют общую высоту CH, поэтому $\frac{S}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}$. Треугольники AB_1C и AB_1C_1 также имеют общую высоту — B_1H_1, поэтому $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$. Перемножая полученные равенства, находим:

$$\frac{S}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{AB_1 \cdot AC_1}, \text{ или } \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

Теорема доказана.

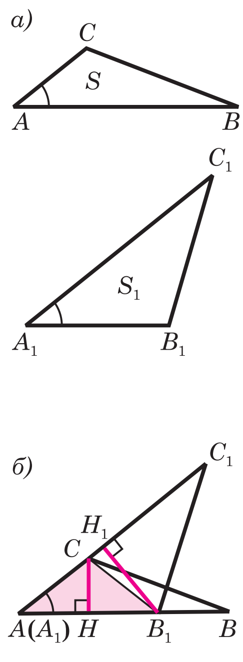


Рис. 211

Рассмотрим ещё один способ нахождения площади треугольника.

Теорема

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

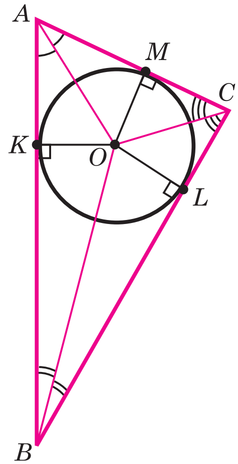


Рис. 212

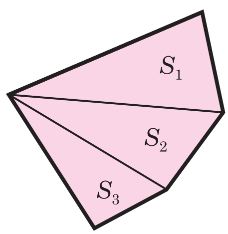
Пусть треугольник ABC описан около окружности с центром в точке O и радиусом r. Соединим центр окружности с вершинами треугольника (рис. 212). Получим, что треугольник ABC составлен из трёх треугольников: ABO, BCO и CAO. Если в каждом из этих треугольников принять за основание сторону треугольника ABC, то высотой окажется радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC. Поэтому площадь S треугольника ABC выражается формулой

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}CA \cdot r = \frac{AB + BC + CA}{2} \cdot r.$$

Теорема доказана.

59. Площадь трапеции

Для вычисления площади произвольного многоугольника обычно поступают так: разбивают многоугольник на треугольники и находят площадь каждого треугольника. Сумма площадей этих треугольников равна площади данного многоугольника (рис. 213). Используя этот приём, выведем формулу для вычисления площади трапеции. Условимся называть **высотой трапеции** перпендикуляр, проведённый из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание. На рисунке 214 отрезок BH (а также отрезок DH_1) — высота трапеции $ABCD$.



$S = S_1 + S_2 + S_3$

Рис. 213

Теорема

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

Доказательство

Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, высотой BH и площадью S (рис. 214).

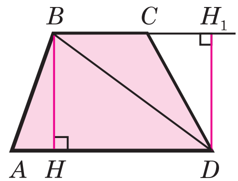


Рис. 214

Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Диагональ BD разделяет трапецию на два треугольника ABD и BCD, поэтому $S = S_{ABD} + S_{BCD}$. Примем отрезки AD и BH за основание и высоту треугольника ABD, а отрезки BC и DH_1 за основание и высоту треугольника BCD. Тогда

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BH, \ S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DH_1.$$

Так как $DH_1 = BH$, то $S_{BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot BH$.

Таким образом,

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot BH + \frac{1}{2}BC \cdot BH = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BH.$$

Теорема доказана.

Задачи

555 Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь параллелограмма. Найдите: а) S, если $a = 15$ см, $h = 12$ см; б) a, если $S = 34$ см^2, $h = 8{,}5$ см; в) a, если $S = 162$ см^2, $h = \frac{1}{2}a$; г) h, если $h = 3a$, $S = 27$.

556 Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

557 Смежные стороны параллелограмма равны 12 см и 14 см, а его острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

558 Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен 150°. Найдите площадь ромба.

559 Сторона параллелограмма равна 8,1 см, а диагональ, равная 14 см, образует с ней угол в 30°. Найдите площадь параллелограмма.

560 Пусть a и b — смежные стороны параллелограмма, S — площадь, а h_1 и h_2 — его высоты. Найдите: а) h_2, если $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см, $h_2 > h_1$; б) h_1, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $h_2 = 6$ см, $h_2 > h_1$; в) h_1 и h_2, если $S = 54$ см^2, $a = 4{,}5$ см, $b = 6$ см.

561 Острый угол параллелограмма равен 30°, а высоты, проведённые из вершины тупого угла, равны 2 см и 3 см. Найдите площадь параллелограмма.

562 Диагональ параллелограмма равна его стороне. Найдите площадь параллелограмма, если бóльшая его сторона равна 15,2 см, а один из его углов — 45°.

563 Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.

564 Пусть a — основание, h — высота, а S — площадь треугольника. Найдите: а) S, если $a = 7$ см, $h = 11$ см; б) S, если $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 5$ см; в) h, если $S = 37{,}8$ см^2, $a = 14$ см; г) a, если $S = 12$ см^2, $h = 3\sqrt{2}$ см.

565 Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 16 см и 22 см, а высота, проведённая к стороне AB, равна 11 см. Найдите высоту, проведённую к стороне BC.

566 Две стороны треугольника равны 7,5 см и 3,2 см. Высота, проведённая к большей стороне, равна 2,4 см. Найдите высоту, проведённую к меньшей из данных сторон.

567 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 4 см и 11 см; б) 1,2 дм и 3 дм.

568 Площадь прямоугольного треугольника равна 168 см^2. Найдите его катеты, если отношение их длин равно $\frac{7}{12}$.

569 Пусть a, b, c — стороны треугольника, P — периметр треугольника, r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника. Найдите:
а) r, если $P = 56$, $S = 84$;
б) S, если $P = 144$, $r = 3{,}5$;
в) a, если $b = 15$, $c = 20$, $r = 2$, $S = 42$.

570 В треугольник ABC вписана окружность радиуса 3 см, которая касается сторон AB, BC и CA в точках P, Q и R. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 5$ см, $BQ = 5$ см, $CR = 6$ см.

571 Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m, параллельная стороне AB. Докажите, что все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади.

572 Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой.

573 Начертите треугольник ABC. Через вершину A проведите две прямые так, чтобы они разделили этот треугольник на три треугольника, имеющие равные площади.

574 Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Вычислите площадь ромба, если его диагонали равны: а) 3,2 дм и 14 см; б) 4,6 дм и 2 дм.

575 Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27 см^2.

576 В выпуклом четырёхугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей.

577 Точки D и E лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC. Найдите: а) S_{ADE}, если $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $AD = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10$ см^2; б) AD, если $AB = 8$ см, $AC = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10$ см^2, $S_{ADE} = 2$ см^2.

578 Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если:
а) $AB = 21$ см, $CD = 17$ см, высота BH равна 7 см;
б) $\angle D = 30°$, $AB = 2$ см, $CD = 10$ см, $DA = 8$ см;
в) $BC \perp AB$, $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $CD = 13$ см.

579 Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6 см, а больший угол равен 135°.

580 Тупой угол равнобедренной трапеции равен 135°, а высота, проведённая из вершины этого угла, делит большее основание на отрезки 1,4 см и 3,4 см. Найдите площадь трапеции.

§3 Теорема Пифагора

60. Теорема Пифагора

Пользуясь свойствами площадей многоугольников, мы установим теперь замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника.

Теорема, которую мы докажем, называется **теоремой Пифагора**. Она является важнейшей теоремой геометрии.

Теорема

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство

Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 215, *а*). Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

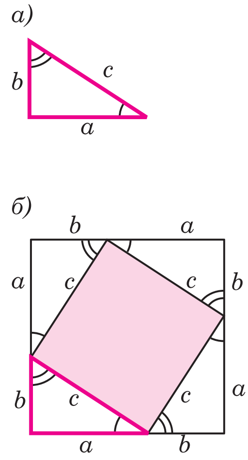
Достроим треугольник до квадрата со стороной $a + b$ так, как показано на рисунке 215, *б*. Площадь S этого квадрата равна $(a + b)^2$. С другой стороны, этот квадрат составлен из четырёх равных прямоугольных треугольников (объясните почему), площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}ab$, и квадрата со стороной c, поэтому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2 = 2ab + c^2.$$

Таким образом, $(a + b)^2 = 2ab + c^2$, откуда

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема доказана.



$(a + b)^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$

Рис. 215

Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и связывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора. Возможно, что тогда ещё не знали её доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путём на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашёл доказательство этого соотношения. Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принёс в жертву богам быка, по другим свидетельствам — даже сто быков. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. В настоящее время их насчитывается более ста. С одним из них мы уже познакомились, ещё с одним познакомимся в следующей главе (задача **684**). Многие известные мыслители и писатели прошлого обращались к этой замечательной теореме и посвятили ей свои строки.

Пифагор — древнегреческий учёный (VI в. до н. э.)

61. Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Докажем, что угол C прямой. Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, у которого $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$ (рис. 216). По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, и, значит, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$. Но $AC^2 + BC^2 = AB^2$ по условию теоремы. Следовательно, $A_1B_1^2 = AB^2$, откуда $A_1B_1 = AB$.

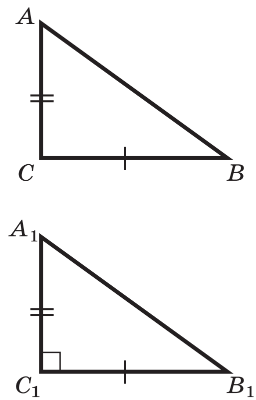


Рис. 216

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам, поэтому $\angle C = \angle C_1$, т. е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C.

Теорема доказана.

По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник со сторонами 3, 4 и 5 является прямоугольным: $5^2 = 3^2 + 4^2$. Прямоугольными являются также треугольники со сторонами 5, 12, 13; 8, 15, 17 и 7, 24, 25 (объясните почему).

Прямоугольные треугольники, у которых длины сторон выражаются целыми числами, называются **пифагоровыми треугольниками**. Можно доказать, что катеты a, b и гипотенуза c таких треугольников выражаются формулами $a = 2k \cdot m \cdot n$, $b = k\,(m^2 - n^2)$, $c = k\,(m^2 + n^2)$, где k, m и n — любые натуральные числа, такие, что $m > n$.

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 часто называют **египетским треугольником**, так как он был известен ещё древним египтянам. Для построения прямых углов египтяне поступали так: на верёвке делали метки, делящие её на 12 равных частей, связывали концы верёвки и растягивали на земле с помощью кольев в виде треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямым.

62. Формула Герона

Теорема

Площадь S треугольника со сторонами a, b, c выражается формулой $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В любом треугольнике по крайней мере два угла острые. Пусть A и B — острые углы треугольника ABC. Тогда основание H высоты CH треугольника лежит на стороне AB. Введём обозначения: $CH = h$, $AH = y$, $HB = x$ (рис. 217). По теореме Пифагора $a^2 - x^2 = h^2 = b^2 - y^2$, откуда $y^2 - x^2 = b^2 - a^2$, или $(y-x)(y+x) = b^2 - a^2$. Так как $y + x = c$, то $y - x = \frac{1}{c}(b^2 - a^2)$. Сложив два последних равенства и разделив на 2, получим:

$$y = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}.$$

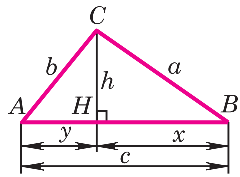


Рис. 217

Поэтому

$$h^2 = b^2 - y^2 = (b+y)(b-y) =$$

$$= \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) =$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2c} \cdot \frac{a^2-(b-c)^2}{2c} =$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{2p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}.$$

Следовательно, $h = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$.

Но $S = \dfrac{1}{2}hc$, откуда и получаем:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Теорема доказана.

Выведенную нами формулу обычно называют формулой Герона, по имени древнегреческого математика Герона Александрийского, жившего предположительно в I в. н. э.

Задачи

581 Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника по данным катетам a и b:
а) $a = 6$, $b = 8$;
б) $a = 5$, $b = 6$;
в) $a = \dfrac{3}{7}$, $b = \dfrac{4}{7}$;
г) $a = 8$, $b = 8\sqrt{3}$.

582 В прямоугольном треугольнике a и b — катеты, c — гипотенуза. Найдите b, если:
а) $a = 12$, $c = 13$;
б) $a = 7$, $c = 9$;
в) $a = 12$, $c = 2b$;
г) $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2b$;
д) $a = 3b$, $c = 2\sqrt{10}$.

583 Найдите катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла $60°$, если гипотенуза равна c.

584 В прямоугольнике $ABCD$ найдите:
а) AD, если $AB = 5$, $AC = 13$;
б) BC, если $CD = 1{,}5$, $AC = 2{,}5$;
в) CD, если $BD = 17$, $BC = 15$.

585 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а основание равно 16 см. Найдите высоту, проведённую к основанию.

586 Найдите: а) высоту равностороннего треугольника, если его сторона равна 6 см; б) сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 4 см.

587 Докажите, что площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где a — сторона треугольника. Найдите площадь равностороннего треугольника, если его сторона равна:
а) 5 см; б) 1,2 см; в) $2\sqrt{2}$ дм.

588 Найдите боковую сторону и площадь равнобедренного треугольника, если: а) основание равно 12 см, а высота, проведённая к основанию, равна 8 см; б) основание равно 18 см, а угол, противолежащий основанию, равен 120°; в) треугольник прямоугольный и высота, проведённая к гипотенузе, равна 7 см.

589 По данным катетам a и b прямоугольного треугольника найдите высоту, проведённую к гипотенузе:
а) $a = 5$, $b = 12$; б) $a = 12$, $b = 16$.

590 Найдите высоты треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 12 см.

591 Найдите сторону и площадь ромба, если его диагонали равны 10 см и 24 см.

592 Найдите диагональ и площадь ромба, если его сторона равна 10 см, а другая диагональ — 12 см.

593 Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если: а) $AB = 10$ см, $BC = DA = 13$ см, $CD = 20$ см; б) $\angle C = \angle D = 60°$, $AB = BC = 8$ см; в) $\angle C = \angle D = 45°$, $AB = 6$ см, $BC = 9\sqrt{2}$ см.

594 Основание D высоты CD треугольника ABC лежит на стороне AB, причём $AD = BC$. Найдите AC, если $AB = 3$, а $CD = \sqrt{3}$.

595 Одна из диагоналей параллелограмма является его высотой. Найдите эту диагональ, если периметр параллелограмма равен 50 см, а разность смежных сторон равна 1 см.

596 Выясните, является ли треугольник прямоугольным, если его стороны выражаются числами: а) 6, 8, 10; б) 5, 6, 7; в) 9, 12, 15; г) 10, 24, 26; д) 3, 4, 6; е) 11, 9, 13; ж) 15, 20, 25. В каждом случае ответ обоснуйте.

597 Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами, равными: а) 24 см, 25 см, 7 см; б) 15 см, 17 см, 8 см.

598 В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

599 В прямоугольный треугольник вписана окружность радиуса r. Найдите периметр треугольника, если: а) гипотенуза равна 26 см, $r = 4$ см; б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

600 Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если: а) $AC = 8$ см, $BC = 6$ см; б) $AC = 18$ см, $\angle B = 30°$.

601 Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

602 Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°, боковая сторона треугольника равна 8 см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

603 В комнату необходимо занести мебельный щит. Рабочие решили для этого использовать окно, размеры которого 600 × 600 мм. Мебельный щит имеет размеры 800 × 2000 мм. Смогут ли рабочие это сделать?

604 Семья купила LED-телевизор с подставкой глубиной 25 см и соотношением сторон 16 : 9. Диагональ телевизора — 31,5 дюйм (1 дюйм ≈ 2,54 см). Получится ли поставить этот телевизор в квадратную нишу шириной 74 см и глубиной 35 см?

Вопросы для повторения к главе VII

1 Расскажите, как измеряются площади многоугольников.

2 Сформулируйте основные свойства площадей многоугольников.

3 Какие многоугольники называются равновеликими и какие равносоставленными?

4 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади прямоугольника.

5 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади параллелограмма.

6 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади треугольника. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника по его катетам?

7 Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей двух треугольников, имеющих по равному углу.

8 Сформулируйте и докажите теорему о вычислении площади трапеции.

9 Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.

10 Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.

11 Какие треугольники называются пифагоровыми? Приведите примеры пифагоровых треугольников.

12 Какая формула площади треугольника называется формулой Герона? Выведите эту формулу.

Дополнительные задачи

605 Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведённой к гипотенузе.

606 Площадь земельного участка равна 27 га. Выразите площадь этого же участка: а) в квадратных метрах; б) в квадратных километрах.

607 Высоты параллелограмма равны 5 см и 4 см, а периметр равен 42 см. Найдите площадь параллелограмма.

608 Найдите периметр параллелограмма, если его площадь равна 24 см^2, а точка пересечения диагоналей удалена от сторон на 2 см и 3 см.

609 Меньшая сторона параллелограмма равна 29 см. Перпендикуляр, проведённый из точки пересечения диагоналей к большей стороне, делит её на отрезки, равные 33 см и 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

610 Докажите, что из всех треугольников, у которых одна сторона равна a, а другая — b, наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны.

611 Как провести две прямые через вершину квадрата, чтобы разделить его на три фигуры, площади которых равны?

612* Каждая сторона одного треугольника больше любой стороны другого треугольника. Следует ли из этого, что площадь первого треугольника больше площади второго треугольника?

613* Докажите, что сумма расстояний от точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения этой точки.

614 Докажите, что сумма расстояний от точки, лежащей внутри равностороннего треугольника, до его сторон не зависит от положения этой точки.

615* Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум другим сторонам и пересекающие стороны AB и AC соответственно в точках E и F. Докажите, что треугольники CDE и BDF равновеликие.

616 В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и CD диагонали пересекаются в точке O.
а) Сравните площади треугольников ABD и ACD.
б) Сравните площади треугольников ABO и CDO.
в) Докажите, что выполняется равенство $OA \cdot OB = OC \cdot OD$.

617* Основания трапеции равны a и b. Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный основаниям, разделяет трапецию на две равновеликие трапеции. Найдите длину этого отрезка.

618 Диагонали ромба равны 18 м и 24 м. Найдите периметр ромба и расстояние между параллельными сторонами.

619 Площадь ромба равна 540 см^2, а одна из его диагоналей равна 4,5 дм. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до стороны ромба.

620 Найдите площадь равнобедренного треугольника, если: а) боковая сторона равна 20 см, а угол при основании равен $30°$; б) высота, проведённая к боковой стороне, равна 6 см и образует с основанием угол в $45°$.

621 В треугольнике ABC $BC = 34$ см. Перпендикуляр MN, проведённый из середины BC к прямой AC, делит сторону AC на отрезки $AN = 25$ см и $NC = 15$ см. Найдите площадь треугольника ABC.

622 Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = 5$ см, $BC = 13$ см, $CD = 9$ см, $DA = 15$ см, $AC = 12$ см.

623 Найдите площадь равнобедренной трапеции, если: а) её меньшее основание равно 18 см, высота — 9 см и острый угол равен $45°$; б) её основания равны 16 см и 30 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

624 Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой высота равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

625 Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а сумма оснований равна $2a$. Найдите площадь трапеции.

626 Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

627 В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 17$ см, $BC = 5$ см и боковой стороной $AB = 10$ см через вершину B проведена прямая, делящая диагональ AC пополам и пересекающая основание AD в точке M. Найдите площадь треугольника BDM.

628 Два квадрата со стороной a имеют одну общую вершину, причём сторона одного из них лежит на диагонали другого. Найдите площадь общей части этих квадратов.

629 Стороны треугольника равны 13 см, 5 см и 12 см. Найдите площадь этого треугольника.

630 Расстояние от точки M, лежащей внутри треугольника ABC, до прямой AB равно 6 см, а до прямой AC равно 2 см. Найдите расстояние от точки M до прямой BC, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см.

631 В ромбе высота, равная $\frac{4\sqrt{2}}{6}$ см, составляет $\frac{2}{3}$ большей диагонали. Найдите площадь ромба.

632 В равнобедренной трапеции диагональ равна 10 см, а высота равна 6 см. Найдите площадь трапеции.

633 В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если боковая сторона CD трапеции равна 12 см, а расстояние от точки O до прямой CD равно 5 см.

634 Диагонали четырёхугольника равны 16 см и 20 см и пересекаются под углом в 30°. Найдите площадь этого четырёхугольника.

635 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC высота AD равна 8 см. Найдите площадь треугольника ABC, если медиана DM треугольника ADC равна 8 см.

636 Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 см и 8 см. Прямая, проходящая через вершину C и перпендикулярная к прямой BD, пересекает сторону AD в точке M, а диагональ BD в точке K. Найдите площадь четырёхугольника $ABKM$.

637 В треугольнике ABC проведена высота BH. Докажите, что если:
а) угол A острый, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$;
б) угол A тупой, то $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$.

638 На клетчатой бумаге (рис. 218) изображены треугольники. Найдите их площади.

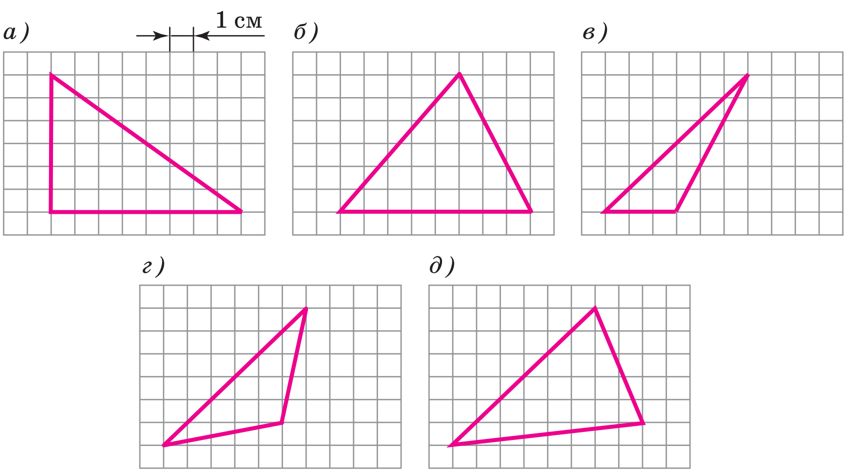


Рис. 218

639 На клетчатой бумаге (рис. 219) изображены многоугольники. Найдите их площади.

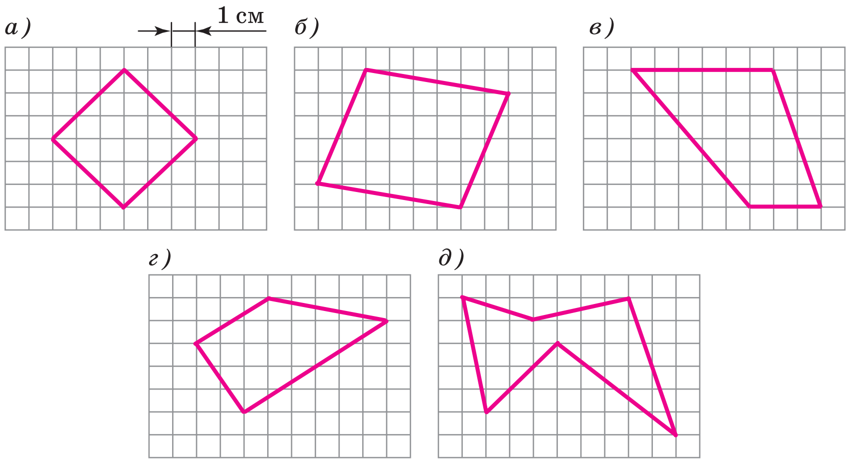


Рис. 219

Глава VIII

Подобные треугольники

Вокруг нас немало предметов, которые имеют одинаковую форму, но разные размеры. Самый простой пример — большой и маленький мячи. В геометрии фигуры одинаковой формы называются подобными. Данная глава посвящена изучению подобных треугольников и признаков их подобия. Эти признаки широко используются в геометрии, в частности с их помощью будет доказано утверждение, сформулированное ещё при изучении геометрии в 7 классе: медианы треугольника пересекаются в одной точке. Кроме того, будет рассказано об использовании свойств подобных треугольников при проведении измерительных работ на местности.

§1 Определение подобных треугольников

63. Пропорциональные отрезки

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{CD}$.

Говорят, что **отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1**, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$. Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, длины которых равны 3 см и 1,5 см. В самом деле,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}.$$

Понятие пропорциональности вводится и для большего числа отрезков. Так, например, три отрезка AB, CD и EF **пропорциональны** трём отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и E_1F_1, если справедливо равенство

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1}.$$

64. Определение подобных треугольников

В повседневной жизни встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например футбольный и теннисный мячи, круглая тарелка и большое круглое блюдо. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть подобными. Так, подобными являются любые два квадрата, любые два круга.

Введём понятие подобных треугольников.

Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ углы соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются **сходственными** (рис. 220).

Определение

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Другими словами, два треугольника подобны, если для них можно ввести обозначения ABC и $A_1B_1C_1$ так, что

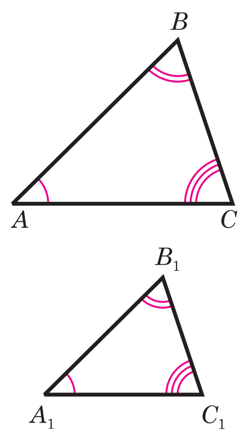
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = C_1, \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k. \qquad (2)$$

Число k, равное отношению сходственных сторон подобных треугольников, называется **коэффициентом подобия**.

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. На рисунке 220 изображены подобные треугольники.

Оказывается, что подобие треугольников можно установить, проверив только некоторые из равенств (1) и (2). В следующем параграфе мы рассмотрим три признака подобия треугольников.



AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 – сходственные стороны

Рис. 220

65. Отношение площадей подобных треугольников

Теорема

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, причём коэффициент подобия равен k. Обозначим буквами S и S_1 площади этих треугольников. Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ (по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, п. 58). По формулам (2) имеем: $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, $\frac{AC}{A_1C_1} = k$, поэтому $\frac{S}{S_1} = k^2$.

Теорема доказана.

Задачи

640 Найдите отношение отрезков AB и CD, если их длины равны соответственно 15 см и 20 см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в миллиметрах?

641 Пропорциональны ли изображённые на рисунке 221, *а*) отрезки: а) AC, CD и M_1M_2, MM_1; б) AB, BC, CD и MM_2, MM_1, M_1M_2; в) AB, BD и MM_1, M_1M_2?

642 Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Решение

Пусть AD — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$ (рис. 221, *б*). Треугольники ABD и ACD имеют об-

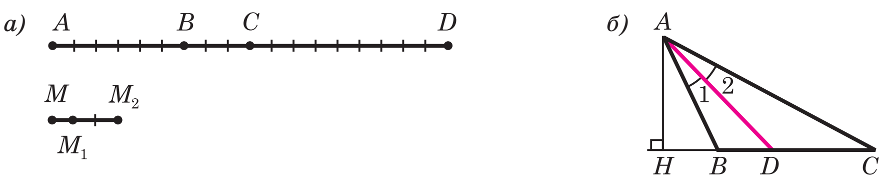


Рис. 221

щую высоту AH, поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$. С другой стороны, эти же треугольники имеют по равному углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$. Из двух равенств для отношения площадей получаем $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, или $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$, что и требовалось доказать.

643 Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите: а) AB, если $BC = 9$ см, $AD = 7{,}5$ см, $DC = 4{,}5$ см; б) DC, если $AB = 30$, $AD = 20$, $BC = 16$.

644 Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите BD и DC, если $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см.

645 Биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC на отрезки CD и BD, равные соответственно $4{,}5$ см и $13{,}5$ см. Найдите AB и AC, если периметр треугольника ABC равен 42 см.

646 В треугольник MNK вписан ромб $MDEF$ так, что вершины D, E и F лежат соответственно на сторонах MN, NK и MK. Найдите отрезки NE и EK, если $MN = 7$ см, $NK = 6$ см, $MK = 5$ см.

647 Периметр треугольника CDE равен 55 см. В этот треугольник вписан ромб $DMFN$ так, что вершины M, F и N лежат соответственно на сторонах CD, CE и DE. Найдите стороны CD и DE, если $CF = 8$ см, $EF = 12$ см.

648 Подобны ли треугольники ABC и DEF, если $\angle A = 106°$, $\angle B = 34°$, $\angle E = 106°$, $\angle F = 40°$, $AC = 4{,}4$ см, $AB = 5{,}2$ см, $BC = 7{,}6$ см, $DE = 15{,}6$ см, $DF = 22{,}8$ см, $EF = 13{,}2$ см?

649 В подобных треугольниках ABC и KMN стороны AB и KM, BC и MN являются сходственными. Найдите стороны треугольника KMN, если $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $\frac{KM}{AB} = 2{,}1$.

650 Докажите, что отношение сходственных сторон подобных треугольников равно отношению высот, проведённых к этим сторонам.

651 Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2. Одна из сторон второго треугольника равна 9 м. Найдите сходственную ей сторону первого треугольника.

652 Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, и их сходственные стороны относятся как $6 : 5$. Площадь треугольника ABC больше площади треугольника $A_1B_1C_1$ на 77 см^2. Найдите площади треугольников.

653 План земельного участка имеет форму треугольника. Площадь изображённого на плане треугольника равна 87,5 см^2. Найдите площадь земельного участка, если план выполнен в масштабе 1 : 100 000.

654 Докажите, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

655 Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Сходственные стороны BC и B_1C_1 соответственно равны 1,4 м и 56 см. Найдите отношение периметров треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

656 Стороны данного треугольника равны 15 см, 20 см и 30 см. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 26 см.

§2 Признаки подобия треугольников

66. Первый признак подобия треугольников

Теорема

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 222). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$, и, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы треугольника ABC соответственно равны углам треугольника $A_1B_1C_1$.

Докажем, что стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$. Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$ (см. п. 58).

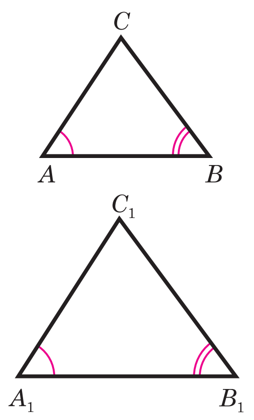


Рис. 222

Из этих равенств следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получаем $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

Итак, стороны треугольника ABC пропорциональны сходственным сторонам треугольника $A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

67. Второй признак подобия треугольников

Теорема

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 223, *а*). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая первый признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (рис. 223, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$.

С другой стороны, по условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

Треугольники ABC и ABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB — общая сторона, $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$, поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle 1 = \angle A_1$). Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$.

Теорема доказана.

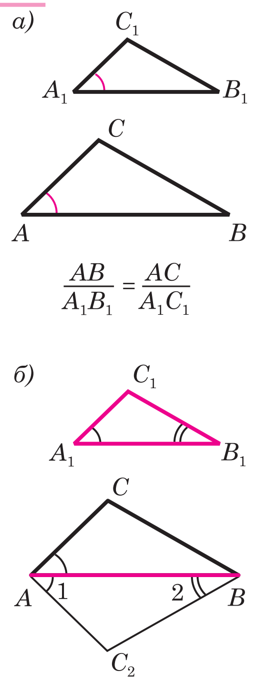


Рис. 223

68. Третий признак подобия треугольников

Теорема

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Пусть стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}. \qquad (1)$$

Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Для этого, учитывая второй признак подобия треугольников, достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$. Рассмотрим треугольник ABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$ (см. рис. 223, *б*). Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$.

Сравнивая эти равенства с равенствами (1), получаем: $BC = BC_2$, $CA = C_2A$. Треугольники ABC и ABC_2 равны по трём сторонам. Отсюда следует, что $\angle A = \angle 1$, а так как $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$.

Теорема доказана.

Задачи

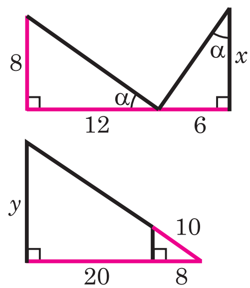


Рис. 224

657 По данным рисунка 224 найдите x и y.

658 На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите: а) EF и FC, если $DE = 8$ см, $EC = 4$ см, $BC = 7$ см, $AE = 10$ см; б) DE и EC, если $AB = 8$ см, $AD = 5$ см, $CF = 2$ см.

659 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. Найдите: а) AB, если $OB = 4$ см, $OD = 10$ см, $DC = 25$ см; б) $\frac{AO}{OC}$ и $\frac{BO}{OD}$, если $AB = a$, $DC = b$; в) AO, если $AB = 9{,}6$ дм, $DC = 24$ см, $AC = 15$ см.

660 Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют: а) по равному острому углу; б) по равному тупому углу; в) по прямому углу? Ответ обоснуйте.

661 Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке M. Найдите расстояния от точки M до концов меньшего основания.

662 Точки M, N и P лежат соответственно на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC, причём $MN \parallel AC$, $NP \parallel AB$. Найдите стороны четырёхугольника $AMNP$, если: а) $AB = 10$ см, $AC = 15$ см, $PN : MN = 2 : 3$; б) $AM = AP$, $AB = a$, $AC = b$.

663 Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD (рис. 225).

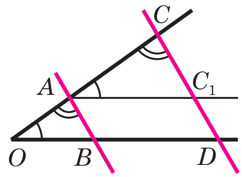


Рис. 225

Решение

Проведём через точку A прямую AC_1, параллельную прямой BD. Она пересечёт CD в точке C_1. По первому признаку подобия треугольников $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$ ($\angle O = \angle CAC_1$, $\angle OAB = \angle C$), следовательно, $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$. Так как $AC_1 = BD$ (объясните почему), то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$, что и требовалось доказать.

664 Стороны угла A пересечены параллельными прямыми BC и DE, причём точки B и D лежат на одной стороне угла, а C и E — на другой. Найдите: а) AC, если $CE = 10$ см, $AD = 22$ см, $BD = 8$ см; б) BD и DE, если $AB = 10$ см, $AC = 8$ см, $BC = 4$ см, $CE = 4$ см; в) BC, если $AB : BD = 2 : 1$ и $DE = 12$ см.

665 Прямые a и b пересечены параллельными прямыми AA_1, BB_1, CC_1, причём точки A, B и C лежат на прямой a, а точки A_1, B_1 и C_1 — на прямой b. Докажите, что $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

666 На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и AFB? Ответ обоснуйте.

667 Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если: а) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $A_1B_1 = 4{,}5$ см, $B_1C_1 = 7{,}5$ см, $C_1A_1 = 10{,}5$ см; б) $AB = 1{,}7$ см, $BC = 3$ см, $CA = 4{,}2$ см, $A_1B_1 = 34$ дм, $B_1C_1 = 60$ дм, $C_1A_1 = 84$ дм?

668 Докажите, что два равносторонних треугольника подобны.

669 Найдите основание равнобедренного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит высоту, проведённую к основанию, в отношении 12 : 5, считая от вершины, а боковая сторона равна 60 см.

670 В треугольнике ABC сторона AB равна a, а высота CH равна h. Найдите сторону квадрата, вписанного в треугольник ABC так, что две соседние вершины квадрата лежат на стороне AB, а две другие — соответственно на сторонах AC и BC.

671 Через точку M, взятую на медиане AD треугольника ABC, и вершину B проведена прямая, пересекающая сторону AC в точке K. Найдите отношение $\frac{AK}{KC}$, если: а) M — середина отрезка AD; б) $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

§3 Применение подобия к доказательству теорем и решению задач

69. Средняя линия треугольника

Напомним, что **средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон. Используем подобие треугольников для доказательства свойства средней линии треугольника.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 226). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

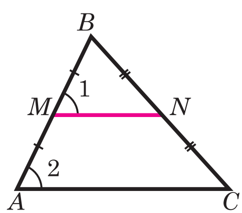


Рис. 226

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ — общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства — что $MN = \frac{1}{2}AC$.

Теорема доказана.

Пользуясь этой теоремой, решим задачу.

Задача

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Решение

Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Обозначим буквой O точку пересечения его медиан AA_1 и BB_1 и проведём среднюю линию A_1B_1 этого треугольника (рис. 227). Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому углы 1 и 2, а также углы 3 и 4 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и A_1B_1 секущими AA_1 и BB_1. Следовательно, треугольники AOB и A_1OB_1 подобны по двум углам, и, значит, их стороны пропорциональны:

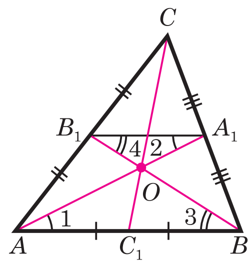


Рис. 227

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой O.

Итак, все три медианы треугольника ABC пересекаются в точке O и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Точку пересечения медиан треугольника называют **центром масс треугольника (центроидом треугольника) или центром тяжести треугольника.** Треугольная сплошная пластина будет находиться в равновесии, если будет опираться на острие карандаша (или стержня) в этой точке — центре масс треугольной пластины (рис. 228).

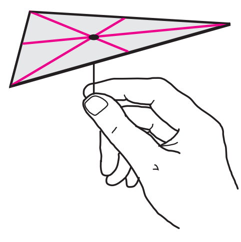


Рис. 228

70. Четыре замечательные точки треугольника

Ранее было доказано, что

— **биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке**, которая является центром окружности, вписанной в этот треугольник;

— **серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке**, которая является центром окружности, описанной около этого треугольника;

— **медианы треугольника пересекаются в одной точке**, которая называется центроидом треугольника.

Аналогичным свойством обладают и высоты треугольника.

Теорема

Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Доказательство

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и докажем, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке (рис. 229).

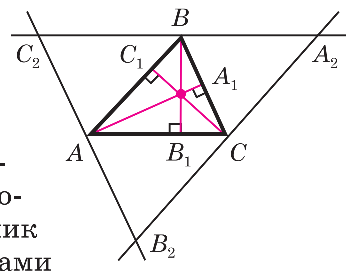


Рис. 229

Проведём через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне. Получим треугольник $A_2B_2C_2$. Точки A, B и C являются серединами сторон этого треугольника.

Действительно, $AB = A_2C$ и $AB = CB_2$ как противоположные стороны параллелограммов ABA_2C и $ABCB_2$, поэтому $A_2C = CB_2$.

Аналогично $C_2A = AB_2$ и $C_2B = BA_2$. Кроме того, как следует из построения, $CC_1 \perp A_2B_2$, $AA_1 \perp B_2C_2$ и $BB_1 \perp A_2C_2$.

Таким образом, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_2B_2C_2$. Поэтому они пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

Итак, с каждым треугольником связаны четыре точки: точка пересечения медиан (**центроид треугольника**), точка пересечения биссектрис, точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам и точка пересечения высот или их продолжений (она называется **ортоцентром треугольника**). Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника**.

71. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Задача

Доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Решение

Пусть $\triangle ABC$ — прямоугольный треугольник с прямым углом C, CD — высота, проведённая из вершины C к гипотенузе AB (рис. 230). Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

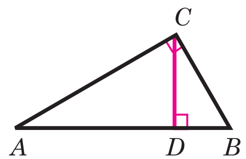


Рис. 230

Треугольники ABC и ACD подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$).

Точно так же подобны треугольники ABC и CBD ($\angle B$ — общий и $\angle ACB = \angle BDC = 90°$), поэтому $\angle A = \angle BCD$.

Наконец, треугольники ACD и CBD также подобны по первому признаку подобия (в этих треугольниках углы с вершиной D прямые и $\angle A = \angle BCD$), что и требовалось доказать.

Отрезок XY называется **средним пропорциональным** (или **средним геометрическим**) для отрезков AB и CD, если

$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}.$$

Исходя из рассмотренной задачи, докажем следующие утверждения:

1⁰. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

Действительно, $\triangle ADC \sim \triangle CBD$ (рис. 230), поэтому $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, откуда $CD^2 = AD \cdot DB$, следовательно,

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}.$$

2⁰. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключённого между катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла.

В самом деле, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (рис. 230), поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, и, следовательно,

$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}.$$

72. Метод подобия в задачах на построение

При решении многих задач на построение треугольников применяют так называемый **метод подобия**. Он состоит в том, что сначала на основании некоторых данных строят треугольник, подобный искомому, а затем, используя остальные данные, строят искомый треугольник.

Рассмотрим пример.

Задача

Построить треугольник по данным двум углам и биссектрисе при вершине третьего угла.

Решение

На рисунке 231, *а* изображены два данных угла и данный отрезок. Требуется построить треугольник, у которого два угла соответственно равны двум данным углам, а биссектриса при вершине третьего угла равна данному отрезку.

Сначала построим какой-нибудь треугольник, подобный искомому. Для этого начертим произвольный отрезок A_1B_1 и построим треугольник A_1B_1C, у которого углы A_1 и B_1 соответственно равны данным углам (рис. 231, *б*).

Далее построим биссектрису угла C и отложим на ней отрезок CD, равный данному отрезку. Через точку D проведём прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает стороны угла C в некоторых точках A и B (рис. 231, *б*). Треугольник ABC искомый.

В самом деле, так как $AB \parallel A_1B_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, и, следовательно, два угла треугольника ABC соответственно равны данным углам. По построению биссектриса CD треугольника ABC равна данному отрезку. Итак, треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Очевидно, задача имеет решение, если сумма двух данных углов меньше 180°. Так как отрезок A_1B_1 можно выбрать произвольно, то существует бесконечно много треугольников, удовлетворяющих условию задачи. Все эти треугольники равны друг другу (объясните почему), поэтому задача имеет единственное решение.

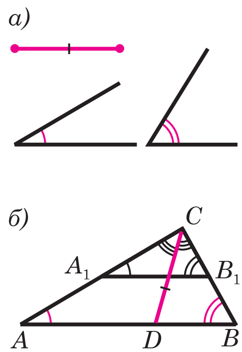


Рис. 231

73. Применение подобия треугольников в измерительных работах на местности

Свойства подобных треугольников могут быть использованы при проведении различных измерительных работ на местности. Мы рассмотрим две задачи: определение высоты предмета и расстояния до недоступной точки.

Определение высоты предмета. Предположим, что нам нужно определить высоту какого-нибудь предмета, например высоту телеграфного столба A_1C_1, изображённого на рисунке 232. Для этого поставим на некотором расстоянии от столба шест AC с вращающейся планкой и направим планку на верхнюю точку A_1 столба, как показано на рисунке. Отметим на поверхности земли точку B, в которой прямая A_1A пересекается с поверхностью земли. Прямоугольные треугольники A_1C_1B и ACB подобны по первому признаку подобия треугольников ($\angle C_1 = \angle C = 90°$, $\angle B$ — общий). Из подобия треугольников следует: $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BC_1}{BC}$, откуда

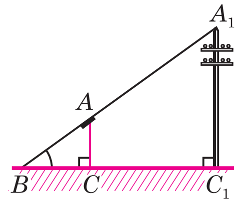


Рис. 232

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot BC_1}{BC}.$$

Измерив расстояния BC_1 и BC и зная длину AC шеста, по полученной формуле определяем высоту A_1C_1 телеграфного столба. Если, например, $BC_1 = 6{,}3$ м, $BC = 2{,}1$ м, $AC = 1{,}7$ м, то

$$A_1C_1 = \frac{1{,}7 \cdot 6{,}3}{2{,}1} = 5{,}1 \text{ м}.$$

Определение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам нужно найти расстояние от пункта A до недоступного пункта B (рис. 233). Для этого на местности выбираем точку C, провешиваем отрезок AC и измеряем его. Затем с помощью астролябии измеряем углы A и C. На листе бумаги строим какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $\angle A_1 = \angle A$, $\angle C_1 = \angle C$, и измеряем длины сторон A_1B_1 и A_1C_1 этого треугольника. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны (по первому признаку подобия треугольников), то

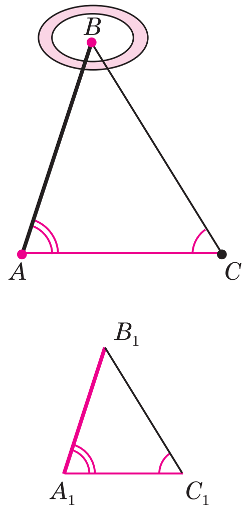


Рис. 233

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

откуда получаем

$$AB = \frac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1}.$$

Эта формула позволяет по известным расстояниям AC, A_1C_1 и A_1B_1 найти расстояние AB.

Для упрощения вычислений удобно построить треугольник $A_1B_1C_1$ таким образом, чтобы $A_1C_1 : AC = 1 : 1000$. Например, если $AC = 130$ м, то расстояние A_1C_1 возьмём равным 130 мм. В этом случае $AB = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot A_1B_1 = 1000 \cdot A_1B_1$, поэтому, измерив расстояние A_1B_1 в миллиметрах, мы сразу получим расстояние AB в метрах.

Пример

Пусть $AC = 130$ м, $\angle A = 73°$, $\angle C = 58°$ (рис. 233). На бумаге строим треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы $\angle A_1 = 73°$, $\angle C_1 = 58°$, $A_1C_1 = 130$ мм, и измеряем отрезок A_1B_1. Он равен 153 мм, поэтому искомое расстояние равно 153 м.

Задачи

672 Дан треугольник, стороны которого равны 8 см, 5 см и 7 см. Найдите периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

673 Расстояние от точки пересечения диагоналей прямоугольника до прямой, содержащей его бóльшую сторону, равно 2,5 см. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

674 Точки P и Q — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника APQ равен 21 см.

675 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

676 Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 18 см. Середина M стороны AB соединена с вершиной D. Найдите отрезки, на которые делится диагональ AC отрезком DM.

677 В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABO равна S.

В задачах **678—680** использованы следующие обозначения для прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C и высотой CH: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $CH = h$, $AH = b_c$, $HB = a_c$.

678 Найдите:
а) h, a и b, если $b_c = 25$, $a_c = 16$;
б) h, a и b, если $b_c = 36$, $a_c = 64$;
в) a, c и a_c, если $b = 12$, $b_c = 6$;

г) b, c и b_c, если $a = 8$, $a_c = 4$;
д) h, b, a_c и b_c, если $a = 6$, $c = 9$.

679 Выразите a_c и b_c через a, b и c.

680 Докажите, что: а) $h = \dfrac{ab}{c}$; б) $\dfrac{a^2}{a_c} = \dfrac{b^2}{b_c}$.

681 Катеты прямоугольного треугольника относятся как 3 : 4, а гипотенуза равна 50 мм. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой, проведённой из вершины прямого угла.

682 Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 11 см больше другого. Найдите гипотенузу, если катеты треугольника относятся как 6 : 5.

683 В треугольнике, стороны которого равны 5 см, 12 см и 13 см, проведена высота к его большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону.

684 Используя утверждение 2^0, п. 71, докажите теорему Пифагора: в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C выполняется равенство $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Решение

Пусть CD — высота треугольника ABC (рис. 230, с. 174). На основании утверждения 2^0, п. 65, имеем

$$AC = \sqrt{AD \cdot AB}, \text{ или } AC^2 = AD \cdot AB.$$

Аналогично $BC^2 = BD \cdot AB$. Складывая эти равенства почленно и учитывая, что $AD + BD = AB$, получаем:

$$AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = (AD + BD) \cdot AB = AB^2.$$

685 Для определения высоты столба A_1C_1, на рисунке 232, с. 177, использован шест с вращающейся планкой. Чему равна высота столба, если $BC_1 = 6{,}3$ м, $BC = 3{,}4$ м, $AC = 1{,}7$ м?

686 Длина тени дерева равна 10,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,7 м, равна 2,5 м. Найдите высоту дерева.

687 Для определения высоты дерева можно использовать зеркало так, как показано на рисунке 234. Луч света FD, отражаясь от зеркала в точке D, попадает в глаз человека (точку B). Определите высоту дерева, если $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4{,}8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

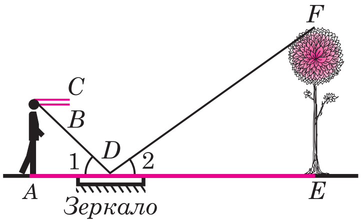


Рис. 234

688 Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC, углы BAC и ACB. Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Найдите AB, если $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см.

689 На рисунке 235 показано, как можно определить ширину BB_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1. Определите BB_1, если $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м, $AB_1 = 34$ м.

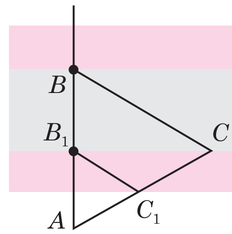


Рис. 235

Задачи на построение

690 Разделите данный отрезок AB на два отрезка AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2.

Решение

Проведём какой-нибудь луч AM, не лежащий на прямой AB, и на этом луче отложим последовательно отрезки AC и CD, равные отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 236). Затем проведём прямую BD и прямую, проходящую через точку C параллельно прямой BD. Она пересечёт отрезок AB в искомой точке X (см. задачу **663**).

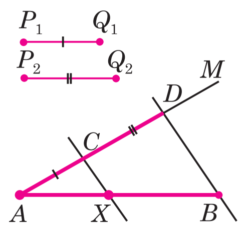


Рис. 236

691 Начертите отрезок AB и разделите его в отношении: а) $2 : 5$; б) $3 : 7$; в) $4 : 3$.

692 Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведённой из вершины меньшего из данных углов.

693 Постройте треугольник по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла.

694 Постройте треугольник ABC по углу A и медиане AM, если известно, что $AB : AC = 2 : 3$.

695 Постройте треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB : AC = 2 : 1$.

696 Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов, равному отношению двух данных отрезков.

§4 Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

74. Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 237). Катет BC этого треугольника является противолежащим углу A, а катет AC — прилежащим к этому углу.

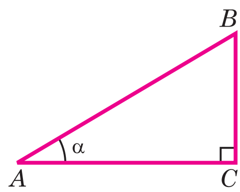


Рис. 237

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Синус, косинус и тангенс угла, равного α, обозначаются символами $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ (читается: «синус альфа», «косинус альфа» и «тангенс альфа»). На рисунке 237

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

Из формул (1) и (2) получаем:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AC}.$$

Сравнивая с формулой (3), находим:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad (4)$$

т. е. **тангенс угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.**

Докажем, что **если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.**

В самом деле, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два прямоугольных треугольника с прямыми углами C и C_1 и равными острыми углами A и A_1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Из этих равенств следует, что $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\sin A = \sin A_1$. Аналогично $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, т. е. $\cos A = \cos A_1$, и $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, т. е. $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A_1$.

Докажем теперь справедливость равенства

$$\mathbf{\sin^2 A + \cos^2 A = 1.} \qquad (5)$$

Из формул (1) и (2) получаем

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, поэтому $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Равенство (5) называется **основным тригонометрическим тождеством**[1].

75. Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°

Найдём сначала значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° и 60°. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник ABC

[1] Слово «тригонометрия» в переводе с греческого языка означает «измерение треугольников».

с прямым углом C, у которого $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ (рис. 238). Так как катет, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы, то $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$. Но $\frac{BC}{AB} = \sin A = \sin 30°$. С другой стороны, $\frac{BC}{AB} = \cos B = \cos 60°$. Итак,

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \cos 60° = \frac{1}{2}.$$

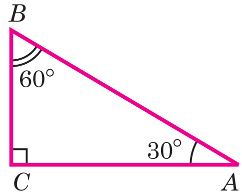


Рис. 238

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \sin^2 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 60° = \sqrt{1 - \cos^2 60°} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (4) находим:

$$\mathrm{tg}\, 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\mathrm{tg}\, 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

Найдём теперь $\sin 45°$, $\cos 45°$ и $\mathrm{tg}\, 45°$. Для этого рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C (рис. 239). В этом треугольнике $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45°$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2AC^2 = 2BC^2$, откуда $AC = BC = \frac{AB}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

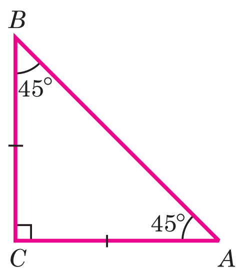


Рис. 239

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\mathrm{tg}\, 45° = \mathrm{tg}\, A = \frac{BC}{AC} = 1.$$

Составим таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ для углов α, равных $30°$, $45°$, $60°$:

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Задачи

697 Найдите синус, косинус и тангенс углов A и B треугольника ABC с прямым углом C, если: а) $BC=8$, $AB=17$; б) $BC=21$, $AC=20$; в) $BC=1$, $AC=2$; г) $AC=24$, $AB=25$.

698 Постройте угол α, если:

а) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}$; в) $\cos\alpha=0{,}2$;

г) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; д) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; е) $\sin\alpha=0{,}4$.

699 Найдите:

а) $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{2}{3}$;

в) $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{4}$.

700 В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а противолежащий угол равен β. а) Выразите другой катет, противолежащий ему угол и гипотенузу через b и β. б) Найдите их значения, если $b=10$ см, $\beta=50°$.

701 В прямоугольном треугольнике один из катетов равен b, а прилежащий к нему угол равен α. а) Выразите второй катет, прилежащий к нему острый угол и гипотенузу через b и α. б) Найдите их значения, если $b=12$ см, $\alpha=42°$.

702 В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c, а один из острых углов равен α. Выразите второй острый угол и катеты через c и α и найдите их значения, если $c=24$ см, а $\alpha=35°$.

703 Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Выразите через a и b гипотенузу и тангенсы острых углов треугольника и найдите их значения при $a=12$, $b=15$.

704 Найдите площадь равнобедренного треугольника с углом α при основании, если: а) боковая сторона равна b; б) основание равно a.

705 Найдите площадь равнобедренной трапеции с основаниями 2 см и 6 см, если угол при большем основании равен α.

706 Насыпь шоссейной дороги имеет в верхней части ширину 60 м. Какова ширина насыпи в нижней её части, если угол наклона откосов равен $60°$, а высота насыпи равна 12 м (рис. 240)?

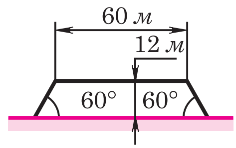


Рис. 240

707 Найдите углы ромба с диагоналями $2\sqrt{3}$ и 2.

708 Стороны прямоугольника равны 3 см и $\sqrt{3}$ см. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.

709 В параллелограмме $ABCD$ сторона AD равна 12 см, а угол BAD равен $47°50'$. Найдите площадь параллелограмма, если его диагональ BD перпендикулярна к стороне AB.

Вопросы для повторения к главе VIII

1 Что называется отношением двух отрезков?

2 В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?

3 Дайте определение подобных треугольников.

4 Сформулируйте и докажите теорему об отношении площадей подобных треугольников.

5 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую первый признак подобия треугольников.

6 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую второй признак подобия треугольников.

7 Сформулируйте и докажите теорему, выражающую третий признак подобия треугольников.

8 Какой отрезок называется средней линией треугольника? Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.

9 Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

10 Сформулируйте и докажите утверждение о том, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на подобные треугольники.

11 Сформулируйте и докажите утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.

12 Приведите пример решения задачи на построение методом подобия.

13 Расскажите, как определить на местности высоту предмета и расстояние до недоступной точки.

14 Объясните, какие две фигуры называются подобными. Что такое коэффициент подобия фигур?

15 Что называется синусом, косинусом, тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?

16 Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

17 Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?

18 Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°? Ответ обоснуйте.

Дополнительные задачи

710 Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CA = 10$ см. Наибольшая сторона треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7,5 см. Найдите две другие стороны треугольника $A_1B_1C_1$.

711 Диагональ AC трапеции $ABCD$ делит её на два подобных треугольника. Докажите, что $AC^2 = a \cdot b$, где a и b — основания трапеции.

712 Биссектрисы MD и NK треугольника MNP пересекаются в точке O. Найдите отношение $OK : ON$, если $MN = 5$ см, $NP = 3$ см, $MP = 7$ см.

713 Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне как 4 : 3, а высота, проведённая к основанию, равна 30 см. Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

714 На продолжении боковой стороны OB равнобедренного треугольника AOB с основанием AB взята точка C так, что точка B лежит между точками O и C. Отрезок AC пересекает биссектрису угла AOB в точке M. Докажите, что $AM < MC$.

715 На стороне BC треугольника ABC взята точка D так, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Докажите, что AD — биссектриса треугольника ABC.

716 Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит сторону AC в отношении $2:7$, считая от вершины A. Найдите стороны отсечённого треугольника, если $AB = 10$ см, $BC = 18$ см, $CA = 21{,}6$ см.

717 Докажите, что медиана AM треугольника ABC делит пополам любой отрезок, параллельный стороне BC, концы которого лежат на сторонах AB и AC.

718 Два шеста AB и CD разной длины a и b установлены вертикально на некотором расстоянии друг от друга так, как показано на рисунке 241. Концы A и D, B и C соединены верёвками, которые пересекаются в точке O. По данным рисунка докажите, что: а) $\frac{m}{d} = \frac{x}{b}$ и $\frac{n}{d} = \frac{x}{a}$; б) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$. Найдите x и докажите, что x не зависит от расстояния d между шестами AB и CD.

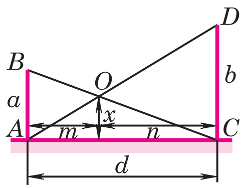


Рис. 241

719 Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если: а) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BM}{B_1M_1}$, где BM и B_1M_1 — медианы треугольников; б) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BH}{B_1H_1}$, где BH и B_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

720 Диагонали прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A взаимно перпендикулярны. Основание AB равно 6 см, а боковая сторона AD равна 4 см. Найдите DC, DB и CB.

721* Отрезок с концами на боковых сторонах трапеции параллелен её основаниям и проходит через точку пересечения диагоналей. Найдите длину этого отрезка, если основания трапеции равны a и b.

722 Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, содержащей его среднюю линию.

723 Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

724 Точки M и N являются соответственно серединами сторон CD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

725 Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает прямую BC в точке D. Докажите, что $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

726 В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

727 В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC сумма оснований равна b, диагональ AC равна a, $\angle ACB = \alpha$. Найдите площадь трапеции.

728 На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $AK = \frac{1}{4}KD$. Диагональ AC и отрезок BK пересекаются в точке P. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника APK равна 1 см².

729 В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle ACD = 90°$, $BC = 4$ см, $AD = 16$ см. Найдите углы C и D трапеции.

730 Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть треугольников, площади которых попарно равны.

731 Основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$ в 5 раз больше основания BC. Высота BH пересекает диагональ AC в точке M, площадь треугольника AMH равна 4 см². Найдите площадь трапеции $ABCD$.

732* Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}$, где AD и A_1D_1 — биссектрисы треугольников.

Задачи на построение

733 Дан треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC, площадь которого в 2 раза больше площади треугольника ABC.

734 Даны три отрезка, длины которых соответственно равны a, b и c. Постройте отрезок, длина которого равна $\frac{ab}{c}$.

735 Постройте треугольник, если даны середины его сторон.

736 Постройте треугольник по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам.

Глава IX

Окружность

Окружность — одна из основных геометрических фигур. В 7 классе вы узнали свойства диаметров и хорд, касательной к окружности, теоремы о вписанной и описанной окружностях треугольника. В этой главе мы вернёмся к изучению взаимного расположения окружности и прямой, рассмотрим теоремы о взаимном расположении двух окружностей. Будут доказаны свойства углов, связанных с окружностью, а также теоремы о вписанной и описанной окружностях четырёхугольников.

§1 Окружность и прямые

76. Взаимное расположение прямой и окружности

В 7 классе мы доказали, что окружность и прямая не могут иметь более двух общих точек. Были выделены три случая взаимного расположения окружности и прямой. Эти фигуры могут

— не иметь общих точек;

— иметь одну общую точку (тогда прямая называется касательной к окружности);

— иметь две общие точки (в этом случае прямая называется секущей окружности).

Взаимное расположение окружности и прямой зависит от расстояния от центра этой окружности до данной прямой. Проведём исследование их взаимного расположения.

Если прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках — концах диаметра, лежащего на прямой.

Пусть прямая p не проходит через центр O окружности радиуса r. Проведём перпендикуляр OH к прямой p и обозначим буквой d длину этого перпендикуляра, т. е. расстояние от центра данной окружности до прямой (рис. 242).

Исследуем взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между d и r. Возможны три случая.

1) $d<r$. На прямой p от точки H отложим два отрезка HA и HB, длины которых равны $\sqrt{r^2-d^2}$ (рис. 242, *а*). По теореме Пифагора

$$OA=\sqrt{OH^2+HA^2}=\sqrt{d^2+(r^2-d^2)}=r,$$

$$OB=\sqrt{OH^2+HB^2}=\sqrt{d^2+(r^2-d^2)}=r.$$

Следовательно, точки A и B лежат на окружности и, значит, являются общими точками прямой p и данной окружности.

Докажем, что прямая p и данная окружность не имеют других общих точек. Предположим, что они имеют ещё одну общую точку C. Тогда медиана OD равнобедренного треугольника OAC, проведённая к основанию AC, является высотой этого треугольника, поэтому $OD\perp p$. Отрезки OD и OH не совпадают, так как середина D отрезка AC не совпадает с точкой H — серединой отрезка AB. Мы получили, что из точки O проведены два перпендикуляра (отрезки OH и OD) к прямой p, что невозможно.

Итак, **если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности ($d<r$), то прямая и окружность имеют две общие точки.**

2) $d=r$. В этом случае $OH=r$, т. е. точка H лежит на окружности и, значит, является общей точкой прямой и окружности (рис. 242, *б*). Прямая p и окружность не имеют других общих точек, так как для любой точки M прямой p, отличной от точки H, $OM>OH=r$ (наклонная OM больше перпендикуляра OH), и, следовательно, точка M не лежит на окружности.

Итак, **если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.**

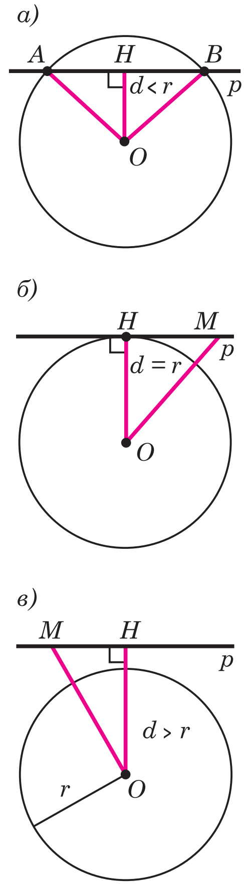


Рис. 242

3) $d > r$. В этом случае $OH > r$, поэтому для любой точки M прямой p $OM \geqslant OH > r$ (рис. 242, *в*). Следовательно, точка M не лежит на окружности.

Итак, **если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.**

77. Взаимное расположение двух окружностей

Выясним, как могут быть расположены по отношению друг к другу две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r соответственно.

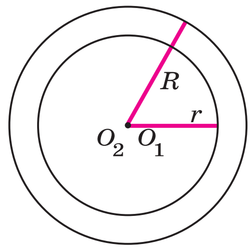


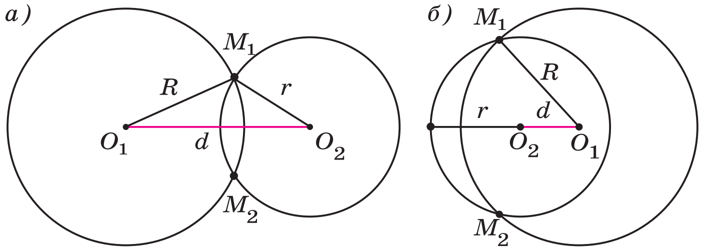
Рис. 243

Окружности с общим центром и различными радиусами называются **концентрическими** (рис. 243). В этом случае окружности не имеют общих точек, все точки одной из окружностей являются внутренними точками относительно другой.

Отметим, что две окружности с разными центрами **не могут иметь более двух общих точек**. Допустим, что это не так. Пусть две окружности с центрами O_1 и O_2 имеют три общие точки A, B и C. Так как каждая из точек O_1 и O_2 равноудалена от точек A, B и C, то точки O_1 и O_2 лежат как на серединном перпендикуляре l_1 к отрезку AB, так и на серединном перпендикуляре l_2 к отрезку BC. Но тогда различные прямые l_1 и l_2 проходят через две точки O_1 и O_2. Это противоречит аксиоме: **через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.**

Рассмотрим окружности, центры O_1 и O_2 которых не совпадают. Обозначим d расстояние между точками O_1 и O_2. Пусть для определённости $R \geqslant r$.

Если окружности имеют две общие точки, то говорят, что они **пересекаются**. На рисунках 244 *а, б* окружности пересекаются в точках M_1 и M_2. Заметим, что в этом случае $d < R + r$ или $d > R - r$.



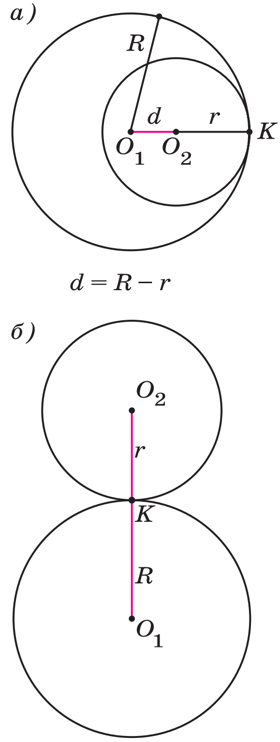
а) $d < R + r$ *б)* $d > R - r$

Рис. 244

Если две окружности имеют одну общую точку, то говорят, что они **касаются.** В этом случае общая точка окружностей называется **точкой касания.** На рисунке 245, *а* окружности **касаются внутренним образом,** в этом случае $d = R - r$. На рисунке 245, *б* окружности **касаются внешним образом,** при этом $d = R + r$.

На рисунке 246, *а* все точки окружности с центром O_2 являются внутренними точками относительно окружности с центром O_1. В таком случае говорят, что одна окружность **лежит внутри** другой, при этом $d < R - r$. На рисунке 246, *б* окружности не имеют общих точек и ни одна из них не лежит внутри другой. В этом случае говорят, что **окружность с центром O_2 лежит вне** окружности с центром O_1. При этом $d > R + r$.

Чтобы выяснить взаимное расположение двух окружностей, **достаточно** сравнить расстояние между их центрами с суммой или разностью радиусов.



а) $d = R - r$ *б)* $d = R + r$

Рис. 245

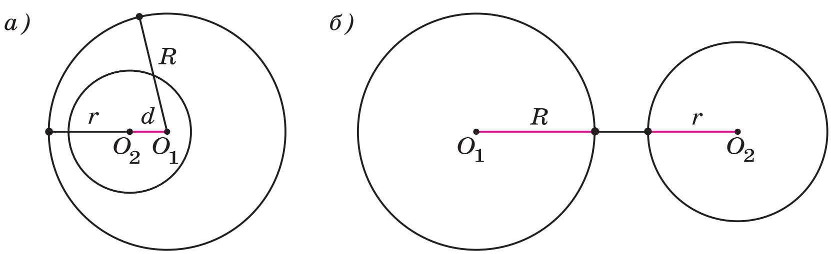


Рис. 246 *а)* $d + r < R$ *или* $d < R - r$ *б)* $d > R + r$

Прежде чем сформулировать и доказать теорему о взаимном расположении двух окружностей, убедимся в справедливости следующего утверждения.

Лемма[1]

Если для длин a, b и c трёх данных отрезков выполняются условия: $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$, то существует треугольник, стороны которого равны данным отрезкам.

Доказательство

Пусть $c \geqslant b \geqslant a$. Докажем, что существует треугольник ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Для этого сначала докажем, что $c > y$, где $y = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

По условию $a + b > c$, поэтому $a > c - b$. Так как $c \geqslant b$, то $a^2 > (c - b)^2$. Из этого неравенства следует: $a^2 > c^2 + b^2 - 2cb$, откуда $2cb > b^2 + c^2 - a^2$. Учитывая то, как определён отрезок y, получаем: $2cb > 2cy$. Следовательно, $b > y$. Но $c \geqslant b$, поэтому $c > y$.

Пусть $AB = c$. На луче AB отложим отрезок $AH = y$. Так как $y < c$, то точка H лежит на отрезке AB. Рассмотрим прямую l, проходящую через точку H и перпендикулярную AB (рис. 247). На этой прямой от точки H отложим отрезок $HC = \sqrt{b^2 - y^2}$. Докажем, что треугольник ABC — искомый.

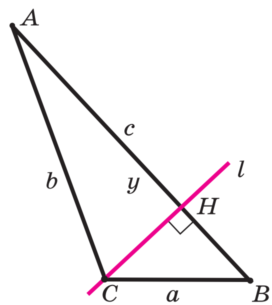


Рис. 247

По теореме Пифагора для треугольника ACH имеем $AC^2 = AH^2 + HC^2$ или $AC^2 = y^2 + (b^2 - y^2) = b^2$, откуда $AC = b$.

Покажите самостоятельно, применяя теорему Пифагора для треугольника BCH, что $BC = a$.

Итак, в треугольнике ABC $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$.

Лемма доказана.

[1] Леммой называется вспомогательная теорема, с помощью которой доказываются следующие теоремы.

Замечание

Выбор отрезка y в доказательстве леммы следует из доказательства формулы Герона для вычисления площади треугольника (п. 62).

Теперь докажем теорему о взаимном расположении двух окружностей.

Теорема

Пусть центры O_1 и O_2 двух окружностей с радиусами R и r не совпадают, $O_1O_2 = d$, тогда:
1) окружности пересекаются, если $R - r < d < R + r$ и $R \geqslant r$;
2) окружности касаются внешним образом, если $d = R + r$;
3) окружности касаются внутренним образом, если $d = R - r$ и $R > r$;
4) окружности не имеют общих точек, причём окружность с центром O_2 расположена вне окружности с центром O_1, если $d > R + r$;
5) окружности не имеют общих точек, причём окружность с центром O_2 расположена внутри окружности с центром O_1, если $d < R - r$ и $R > r$.

Доказательство

Приведём доказательства для случаев 1 и 3.

1) Если $d > R - r$, то $d + r > R$. Так как $d + R > R$, а $R > r$, то $d + R > r$. Также по условию $R + r > d$. По доказанной лемме существует треугольник $O_1M_1O_2$, в котором $O_1O_2 = d$, $O_1M_1 = R$, $O_2M_1 = r$. Тогда точка M_1 принадлежит каждой из двух окружностей.

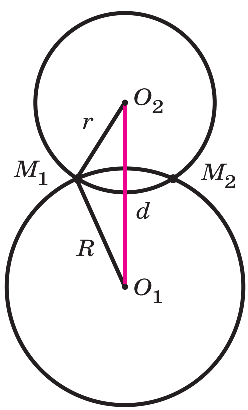


Рис. 248

Пусть точка M_2 симметрична точке M_1 относительно прямой O_1O_2 (рис. 248). Тогда $O_1M_2 = O_1M_1 = R$, $O_2M_2 = O_2M_1 = r$, поэтому точка M_2 также принадлежит каждой окружности и не совпадает с точкой M_1. Итак, окружности имеют две общие точки, то есть **пересекаются**.

3) На луче O_1O_2 отложим отрезок O_1K, длина которого равна R. Из условия следует, что $d < R$, поэтому точка O_2 лежит между точками O_1

и K. Тогда длина отрезка O_2K равна r. Поскольку $O_1K = R$, а $O_2K = r$, точка K принадлежит каждой из двух окружностей (рис. 249).

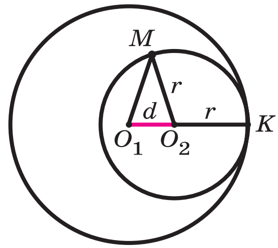


Рис. 249

Докажем, что в этом случае других общих точек у окружностей нет. Действительно, для любой точки M окружности с центром O_2, отличной от точки K, $O_1M < O_1O_2 + O_2M$ или $O_1M < d + r$. Из условия следует, что $d + r = R$, поэтому $O_1M < R$. Это означает, что каждая точка M окружности с центром O_2, отличная от точки K, является внутренней относительно окружности с центром O_1.

Таким образом, окружности **касаются внутренним образом**. Доказательства остальных случаев взаимного расположения двух окружностей проведите самостоятельно (см. задачи **758—760**).

Теорема доказана.

Следствие

Если две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются, то точки их пересечения не лежат на прямой O_1O_2.
Если окружности с центрами O_1 и O_2 касаются, то точка касания лежит на прямой O_1O_2.

78. Общие касательные двух окружностей

Если две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним или внутренним образом в точке K, то точка касания лежит на прямой O_1O_2. Тогда прямая l, проходящая через точку K и перпендикулярная к прямой O_1O_2 (рис. 250, *а*, *б*), является касательной к каждой из окружностей (объясните почему). В таком случае говорят, что прямая l является **общей касательной** данных окружностей.

Изучим вопрос о количестве общих касательных двух окружностей.

Если все точки одной окружности являются внутренними относительно другой окружности, то такие окружности не имеют общих касательных.

В случае касания окружностей внутренним образом (см. рис. 250, *а*) существует единственная общая касательная. Если две окружности пересекаются, то они имеют две общие касательные (рис. 251).

Если окружности касаются внешним образом, они имеют три общие касательные (рис. 252).

Если все точки каждой окружности являются внешними относительно другой окружности, то эти окружности имеют четыре общие касательные (рис. 253).

Общую касательную к двум окружностям называют **внешней**, если обе окружности лежат по одну сторону от этой касательной. Например, на рисунке 253 прямые N_1K_1 и N_2K_2 — внешние касательные окружностей.

Общую касательную к двум окружностям называют **внутренней**, если окружности лежат по разные стороны от этой касательной. На рисунке 253 прямые S_1T_2 и S_2T_1 — внутренние касательные окружностей.

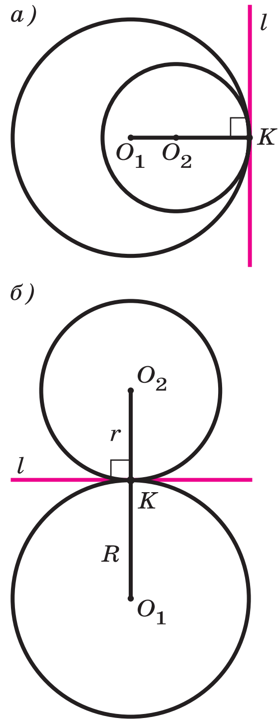


Рис. 250

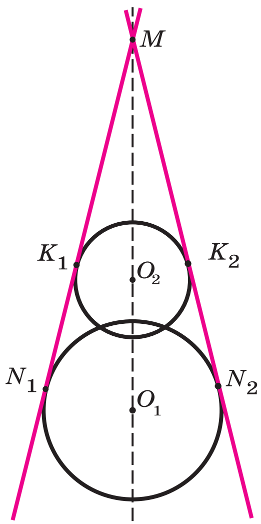


Рис. 251

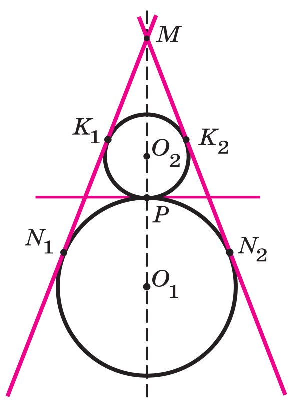


Рис. 252

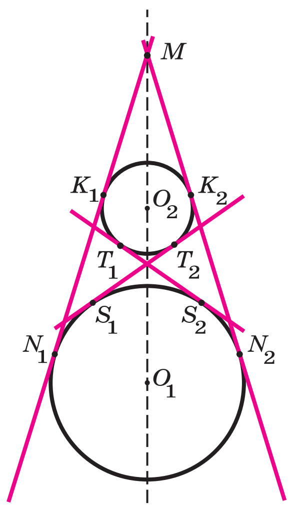


Рис. 253

Практические задания

737 Начертите прямую a и отметьте точку O, не лежащую на этой прямой. Постройте окружность с центром O так, чтобы она: а) не имела с прямой a общих точек; б) пересекалась с прямой a в двух точках; в) касалась прямой a.

738 Начертите прямую a и отметьте на ней точку M. Постройте окружность так, чтобы она касалась прямой a в точке M.

739 Начертите прямую и отметьте на ней две точки A и B. Постройте окружности с центрами в точках A и B так чтобы: а) окружности не имели общих точек и одна окружность лежала внутри другой; б) окружности не имели общих точек и одна окружность лежала вне другой; в) окружности пересекались в двух точках; г) окружности касались внешним образом; д) окружности касались внутренним образом.

Задачи

740 Пусть d — расстояние от центра окружности радиуса r до прямой p. Каково взаимное расположение прямой p и окружности, если: а) $r = 16$ см, $d = 12$ см; б) $r = 5$ см, $d = 4{,}2$ см; в) $r = 7{,}2$ дм, $d = 3{,}7$ дм; г) $r = 8$ см, $d = 1{,}2$ дм; д) $r = 5$ см, $d = 50$ мм?

741 Расстояние от точки A до центра окружности меньше радиуса. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A, является секущей по отношению к данной окружности.

742 Даны квадрат $OABC$ со стороной, равной 6 см, и окружность с центром в точке O радиуса 5 см. Какие из прямых OA, AB, BC и AC являются секущими по отношению к этой окружности?

743 Радиус OM окружности с центром O делит хорду AB пополам. Докажите, что касательная, проведённая через точку M, параллельна хорде AB.

744 Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $OA = 2$ см, а $r = 1{,}5$ см.

745 Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если $\angle AOB = 60°$, а $r = 12$ см.

746 Прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B. Точка C симметрична точке O относительно точки B. Докажите, что $\angle AMC = 3\angle BMC$.

747 Из концов диаметра AB данной окружности проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к касательной, которая не перпендикулярна к диаметру AB. Докажите, что точка касания является серединой отрезка A_1B_1.

748 В прямоугольной трапеции $ABCD$ $\angle A = \angle D = 90°$. Докажите, что: а) прямая AD является касательной к окружности с центром B радиуса AB; б) прямая CD является касательной к окружности с центром A радиуса AD; в) прямая CD не является касательной к окружности с центром B радиуса BC.

749 Отрезок AH — перпендикуляр, проведённый из точки A к прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 3 см. Является ли прямая AH касательной к окружности, если: а) $OA = 5$ см, $AH = 4$ см; б) $\angle HAO = 45°$, $OA = 4$ см; в) $\angle HAO = 30°$, $OA = 6$ см?

750 Радиусы двух пересекающихся окружностей равны 5 см и 3 см. Каким целым числом может быть расстояние между их центрами?

751 Две окружности радиусов 7 см и 3 см касаются внутренним образом. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

752 Две окружности радиусов 10 см и 6 см касаются внешним образом. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

753 Окружность радиуса 8 см расположена вне окружности радиуса r. Каким целым числом может быть r, если расстояние между центрами этих окружностей равно 14 см?

754 Определите взаимное расположение двух окружностей, радиусы которых равны 5 и 9, если расстояние между их центрами равно: а) 16; б) 14; в) 7; г) 4.

755 Сколько общих касательных имеют две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r, если: а) $O_1O_2 = 12$ см, $R = 8$ см, $r = 6$ см; б) $O_1O_2 = 12$ см, $R = 8$ см, $r = 4$ см; в) $O_1O_2 = 12$ см, $R = 6$ см, $r = 4$ см; г) $O_1O_2 = 2$ см, $R = 8$ см, $r = 6$ см; д) $O_1O_2 = 3$ см, $R = 5$ см, $r = 4$ см?

756 Три равные окружности радиуса r касаются друг друга внешним образом. Найдите стороны и углы треугольника, вершинами которого являются: а) центры данных окружностей; б) точки касания данных окружностей.

757 В угол, равный 60°, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

758 Докажите утверждение 2 из теоремы о взаимном расположении окружностей: если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме радиусов этих окружностей, то окружности касаются внешним образом.

759 Докажите утверждение 4 из теоремы о взаимном расположении окружностей: если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы радиусов этих окружностей, то окружности не имеют общих точек, причём одна окружность лежит вне другой окружности.

760 Докажите утверждение 5 из теоремы о взаимном расположении окружностей: если расстояние между центрами двух окружностей с неравными радиусами меньше разности радиусов, то одна окружность лежит внутри другой окружности.

761 Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку вне окружности.

Решение

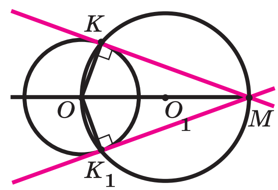


Рис. 254

Пусть даны окружность с центром O и радиусом R и точка M вне этой окружности. Пусть $OM = d$. Так как точка M — внешняя, то $d > R$. Допустим, что задача решена и MK — искомая касательная (рис. 254). Так как прямая MK перпендикулярна радиусу OK, то решение задачи сводится к построению точки K окружности, для которой угол MKO прямой. Эту точку можно построить следующим образом: строим отрезок OM и его середину O_1. Затем строим окружность с центром O_1 радиуса $O_1M = \frac{1}{2}d$. Для этих двух окружностей расстояние между их центрами меньше суммы радиусов $\left(\frac{1}{2}d < R + \frac{1}{2}d\right)$, поэтому окружности пересекаются в двух точках K и K_1. Прямые MK и MK_1 — искомые касательные, так как $MK \perp OK$ и $MK \perp OK_1$. Действительно, углы MKO и MK_1O, вписанные в окружность с центром O_1, опираются на полуокружности, поэтому они прямые. Как видно из решения, задача имеет два решения.

§2 Центральные и вписанные углы

79. Градусная мера дуги окружности

Отметим на окружности две точки A и B. Они разделяют окружность на две дуги. Чтобы различать эти дуги, на каждой из них отмечают промежуточную точку, например L и M (рис. 255). Обозначают дуги так: $\smile ALB$ и $\smile AMB$. Иногда используется обозначение без промежуточной точки: $\smile AB$ (когда ясно, о какой из двух дуг идёт речь).

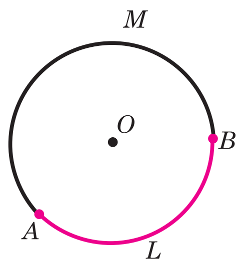


Рис. 255

Дуга называется **полуокружностью**, если отрезок, соединяющий её концы, является диаметром окружности. На рисунке 256, *а* изображены две полуокружности, одна из которых выделена цветом.

Угол с вершиной в центре окружности называется её **центральным углом**. Пусть стороны центрального угла окружности с центром O пересекают её в точках A и B. Центральному углу AOB соответствуют две дуги с концами A и B (рис. 256). Если угол AOB развёрнутый, то ему соответствуют две полуокружности (рис. 256, *а*). Если угол AOB неразвёрнутый, то говорят, что дуга AB, расположенная внутри этого угла, **меньше полуокружности**. На рисунке 256, *б* эта дуга выделена цветом. Про другую дугу с концами A и B говорят, что она **больше полуокружности** (дуга ALB на рисунке 256, *в*).

Дугу окружности можно измерять в градусах. **Если дуга AB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то её градусная мера считается равной градусной мере центрального угла AOB** (рис. 256, *а*, *б*). **Если же дуга AB больше полуокружности, то её градусная мера считается равной $360° - \angle AOB$** (рис. 256, *в*).

Следовательно, **сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна 360°.**

Градусная мера дуги AB (дуги ALB), как и сама дуга, обозначается символом $\smile AB$ ($\smile ALB$). На рисунке 257 градусная мера дуги CAB равна 145°. Обычно говорят кратко: «Дуга CAB равна 145°» и пишут: $\smile CAB = 145°$. На этом же рисунке $\smile ADB = 360° - 115° = 245°$, $\smile CDB = 360° - 145° = 215°$, $\smile DB = 180°$.

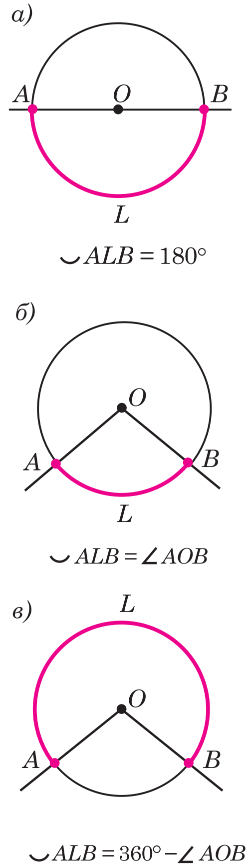


Рис. 256

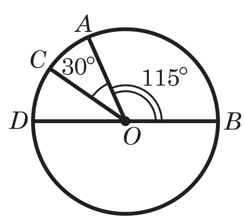


Рис. 257

80. Теорема о вписанном угле

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным углом**.

На рисунке 258 угол ABC вписанный, дуга AMC расположена внутри этого угла. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC **опирается на дугу** AMC. Докажем теорему о вписанном угле.

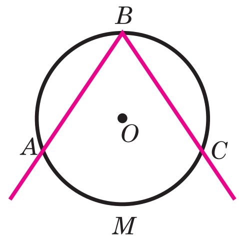


Рис. 258

Теорема

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство

Пусть $\angle ABC$ — вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу AC (рис. 259). Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

1) **Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC**, например со стороной BC (рис. 259, *а*). В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \smile AC$. Так как угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, то $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$.

Отсюда следует, что

$$2\angle 1 = \smile AC, \text{ или } \angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC.$$

2) **Луч BO делит угол ABC на два угла.** В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D (рис. 259, *б*). Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\smile AD$ и $\smile DC$. По доказанному в п. 1) $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile DC$.

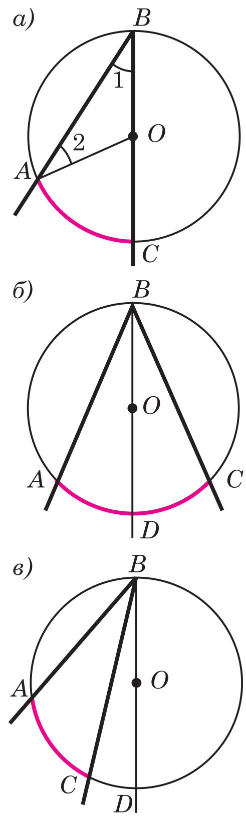


Рис. 259

Складывая эти равенства, получаем

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC, \text{ или}$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

3) **Луч *BO* не делит угол *ABC* на два угла и не совпадает со стороной этого угла.** Для этого случая, пользуясь рисунком 259, *в*, проведите доказательство самостоятельно.

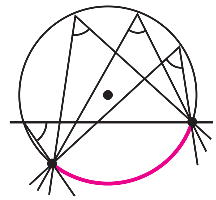


Рис. 260

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 260).

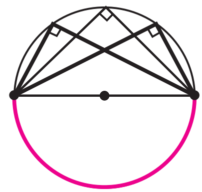


Рис. 261

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой (рис. 261).

81. Углы, образованные хордами, касательными и секущими

Доказанная теорема о вписанном угле позволяет получить формулы для вычисления величин углов между хордами, секущими, касательной и хордой, касательной и секущей.

Докажем теорему об угле между хордами окружности.

Теорема 1

Угол между хордами окружности измеряется полусуммой двух дуг этой окружности, заключённых между сторонами угла и их продолжениями (рис. 262).

Доказательство

Проведём хорду BC. Так как $\angle AMC$ — внешний угол треугольника MBC, то

$\angle AMC = \angle 1 + \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC$, $\angle 2 = \frac{1}{2} \smile BD$, поэтому $\angle AMC = \frac{1}{2} (\smile AC + \smile BD)$.

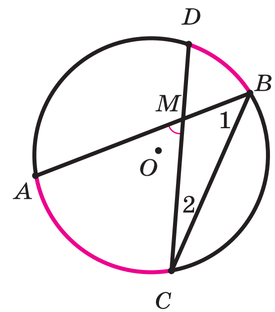


Рис. 262

Теорема доказана.

Докажем теорему об угле между секущими окружности.

Теорема 2

Угол между секущими окружности, пересекающимися в точке, внешней относительно этой окружности, измеряется полуразностью двух дуг этой окружности, заключённых внутри угла (рис. 263).

Доказательство

Проведём хорду BC. Угол ABC является внешним углом треугольника MBC, поэтому $\angle 1 = \angle BMC + \angle 2$.

Так как $\angle BMC = \angle AMC$, то

$$\angle AMC = \angle 1 - \angle 2.$$

По теореме о вписанном угле

$$\angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC, \ \angle 2 = \frac{1}{2} \smile BD,$$

поэтому

$$\angle AMC = \frac{1}{2} (\smile AC - \smile BD).$$

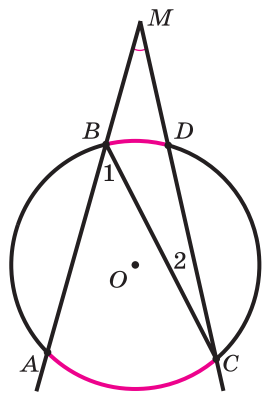


Рис. 263

Теорема доказана.

Докажем теорему об угле между хордой и касательной.

Теорема 3

Угол между хордой и касательной к окружности измеряется половиной дуги этой окружности, заключённой внутри угла (рис. 264).

Доказательство

Пусть BM — диаметр окружности, проходящий через общую точку M хорды MA и касательной MK. Тогда $\angle BMK = 90°$ и $\angle BAM = 90°$ (объясните почему). Так как $\angle BMK = \angle AMK + \angle 1 = 90°$ и $\angle 2 + \angle 1 = 90°$, то $\angle AMK = \angle 2$. По теореме о вписанном угле $\angle 2 = \frac{1}{2} \smile AM$.

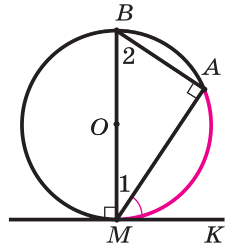


Рис. 264

Следовательно, $\angle AMK = \frac{1}{2} \smile AM$.

Теорема доказана.

Теорема 4

Угол между касательной к окружности и секущей, не проходящей через точку касания, измеряется полуразностью дуг этой окружности, на которые точкой касания делится дуга, заключённая внутри этого угла (рис. 265).

Доказательство

Проведём хорду BK. Так как $\angle 2$ является внешним углом треугольника MKB, то $\angle 2 = \angle BMK + \angle 1$, поэтому $\angle BMK = \angle 2 - \angle 1$. По теореме об угле между хордой и касательной

$$\angle 2 = \frac{1}{2} \smile BK.$$

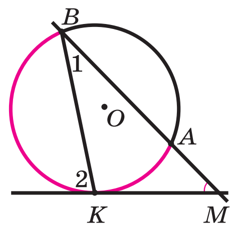


Рис. 265

По теореме о вписанном угле $\angle 1 = \frac{1}{2} \smile AK$.

Следовательно, $\angle BMK = \frac{1}{2} (\smile BK - \smile AK)$.

Теорема доказана.

Задачи

762 Начертите окружность с центром O и отметьте на ней точку A. Постройте хорду AB так, чтобы: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 120°$; г) $\angle AOB = 180°$.

763 Радиус окружности с центром O равен 16. Найдите хорду AB, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$; в) $\angle AOB = 180°$.

764 Хорды AB и CD окружности с центром O равны.
а) Докажите, что две дуги с концами A и B соответственно равны двум дугам с концами C и D.
б) Найдите дуги с концами C и D, если $\angle AOB = 112°$.

765 На полуокружности AB взяты точки C и D так, что $\smile AC = 37°$, $\smile BD = 23°$. Найдите хорду CD, если радиус окружности равен 15 см.

766 Найдите вписанный угол ABC, если дуга AC, на которую он опирается, равна: а) 48°; б) 57°; в) 90°; г) 124°; д) 180°.

767 По данным рисунка 266 найдите x.

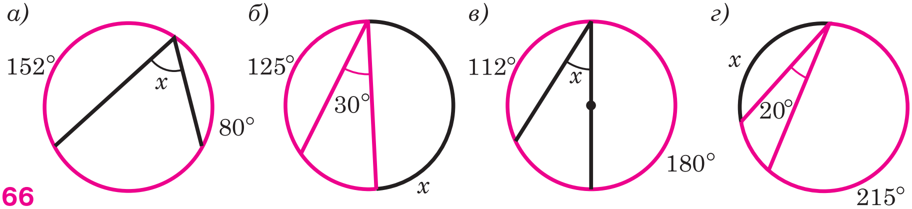


Рис. 266

768 Центральный угол AOB на 30° больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB. Найдите каждый из этих углов.

769 Хорда AB стягивает дугу, равную 115°, а хорда AC — дугу в 43°. Найдите угол BAC.

770 Точки A и B разделяют окружность на две дуги, меньшая из которых равна 140°, а бо́льшая точкой M делится в отношении 6 : 5, считая от точки A. Найдите угол BAM.

771 В окружность вписан треугольник ABC так, что AB — диаметр окружности. Найдите углы треугольника, если:
а) $\smile BC = 134°$; б) $\smile AC = 70°$.

772 В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Найдите углы треугольника, если $\smile BC = 102°$.

773 Через точку A к данной окружности проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая AD, проходящая через центр O (D — точка на окружности, O лежит между A и D). Найдите $\angle BAD$ и $\angle ADB$, если $\smile BD = 110°20'$.

774 Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключённых между параллельными хордами, равны.

775 Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 32°. Бо́льшая дуга окружности, заключённая между сторонами этого угла, равна 100°. Найдите меньшую дугу.

776 Найдите острый угол, образованный двумя секущими, проведёнными из точки, лежащей вне окружности, если дуги, заключённые между секущими, равны 140° и 52°.

777 Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Найдите угол BEC, если $\smile AD = 54°$, $\smile BC = 70°$.

778 Отрезок AC — диаметр окружности, AB — хорда, MA — касательная, угол MAB острый. Докажите, что $\angle MAB = \angle ACB$.

779 Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Докажите, что если AB — диаметр окружности, то $\angle C > \angle A$ и $\angle C > \angle B$.

780 Докажите, что перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

781 Пользуясь утверждением, сформулированным в задаче **780**, постройте отрезок, равный среднему пропорциональному для двух данных отрезков.

782 Стороны угла O касаются каждой из двух окружностей, имеющих общую касательную в точке A. Докажите, что центры этих окружностей лежат на прямой OA.

783 На клетчатой бумаге изображены окружности и связанные с ними углы. По данным рисунка 267 найдите величину угла ABC.

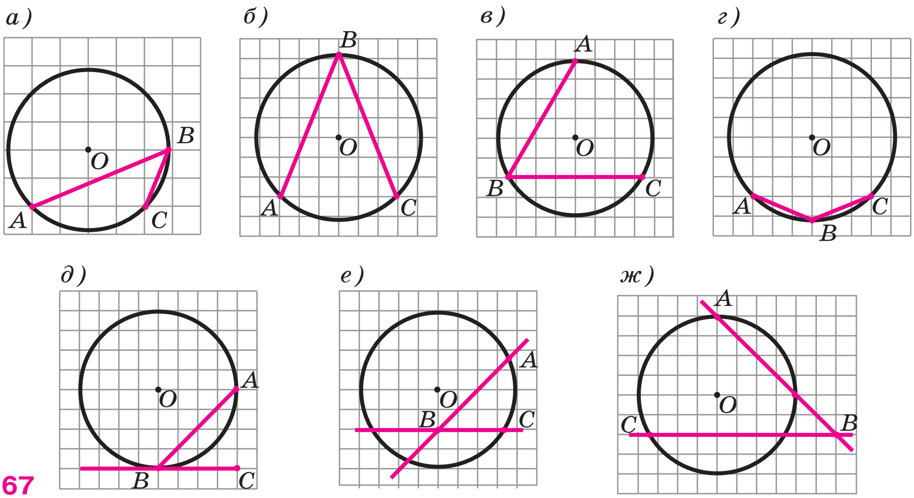


Рис. 267

§3 Вписанная и описанная окружности четырёхугольников

82. Вписанная окружность

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник — **описанным** около этой окружности. На рисунке 268 четырёхугольник $EFMN$ описан около окружности с центром O, а четырёхугольник $DKMN$ не является описанным около этой окружности, так как сторона DK не касается окружности.

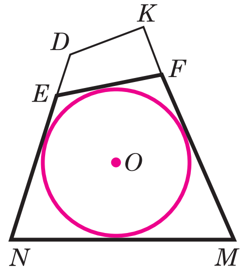


Рис. 268

В отличие от треугольника **не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.**

Рассмотрим, например, прямоугольник, у которого смежные стороны не равны, т. е. прямоугольник, не являющийся квадратом. Ясно, что в такой прямоугольник можно «поместить» окружность, касающуюся трёх его сторон (рис. 269, *а*), но нельзя «поместить» окружность так, чтобы она касалась всех четырёх его сторон, т. е. нельзя вписать окружность. Если же в четырёхугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным свойством:

в любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Это свойство легко установить, используя рисунок 269, *б*, на котором одними и теми же буквами обозначены равные отрезки касательных. В самом деле, $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + AD = a + b + c + d$, поэтому $AB + CD = BC + AD$. Оказывается, верно и обратное утверждение:

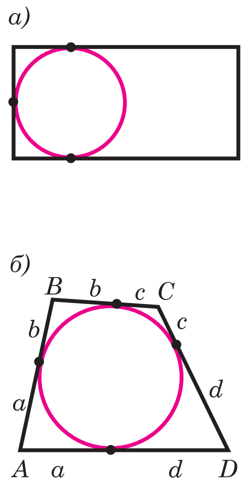


Рис. 269

если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность (см. задачу **807**).

83. Описанная окружность

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется **описанной** около многоугольника, а многоугольник — **вписанным** в эту окружность. На рисунке 270 четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, а четырёхугольник $AECD$ не является вписанным в эту окружность, так как вершина E не лежит на окружности.

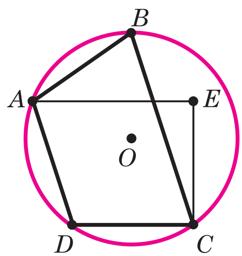


Рис. 270

В отличие от треугольника **около четырёхугольника не всегда можно описать окружность.**

Например, нельзя описать окружность около ромба, не являющегося квадратом (объясните почему). Если же около четырёхугольника можно описать окружность, то его углы обладают следующим замечательным свойством:

в любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Это свойство легко установить, если обратиться к рисунку 271 и воспользоваться теоремой о вписанном угле. В самом деле,

$$\angle A = \frac{1}{2} \smile BCD, \ \angle C = \frac{1}{2} \smile BAD,$$

откуда следует

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} (\smile BCD + \smile BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

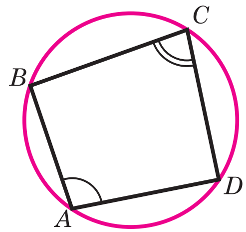


Рис. 271

Оказывается, верно и обратное:

если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность (см. задачу **810**).

Задачи

784 Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 15 см. Найдите периметр этого четырёхугольника.

785 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность, то этот параллелограмм — ромб.

786 Докажите, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.

787 Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырёхугольника.

788 Сумма двух противоположных сторон описанного четырёхугольника равна 10 см, а его площадь — 12 см^2. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырёхугольник.

789 Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность.

790 Докажите, что можно описать окружность: а) около любого прямоугольника; б) около любой равнобедренной трапеции.

791 Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность, то этот параллелограмм — прямоугольник.

792 Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

793 В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK, BM, CN, пересекающиеся в точке H. Докажите, что около каждого из четырёхугольников $CMHK$, $AMHN$, $BNHK$ можно описать окружность.

794 Докажите, что если в четырёхугольник можно вписать окружность, то её центр является точкой пересечения биссектрис углов этого четырёхугольника.

795 Докажите, что если около четырёхугольника можно описать окружность, то её центр является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам этого четырёхугольника.

Вопросы для повторения к главе IX

1 Исследуйте взаимное расположение прямой и окружности в зависимости от соотношения между радиусом окружности и расстоянием от её центра до прямой. Сформулируйте полученные выводы.

2 Объясните, как через данную точку окружности провести касательную к этой окружности.

3 Объясните, почему две окружности не могут иметь три общие точки.

4 Исследуйте взаимное расположение двух окружностей в зависимости от их радиусов и расстояния между их центрами. Сформулируйте полученные выводы.

5 Как зависит количество общих касательных от взаимного расположения двух окружностей?

6 Какой угол называется центральным углом окружности?

7 Объясните, какая дуга называется полуокружностью, какая дуга меньше полуокружности, а какая больше полуокружности.

8 Как определяется градусная мера дуги? Как она обозначается?

9 Какой угол называется вписанным? Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.

10 Докажите, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

11 Докажите, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой.

12 Как измеряются углы между хордами?

13 Как измеряется угол с вершиной вне окружности, стороны которого пересекают эту окружность?

14 Как измеряется угол между касательной к окружности и хордой, один конец которой совпадает с точкой касания?

15 Как измеряется угол между касательной и секущей, не проходящей через точку касания?

16 Какая окружность называется вписанной в многоугольник? Какой многоугольник называется описанным около окружности?

17 Каким свойством обладают стороны четырёхугольника, описанного около окружности?

18 Какая окружность называется описанной около многоугольника? Какой многоугольник называется вписанным в окружность?

19 Каким свойством обладают углы четырёхугольника, вписанного в окружность?

Дополнительные задачи

796 Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключённый между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом (см. п. 41).

797 Две окружности радиусов r и R касаются внешним образом в точке A. К ним проведена общая внешняя касательная MK. а) Докажите, что $\angle KAM = 90°$; б) найдите длину отрезка MK.

798 Даны две окружности радиусов r и R. Расстояние между их центрами равно d ($d > R + r$). Найдите отрезок их общей а) внешней касательной; б) внутренней касательной.

799 Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1. Докажите, что градусные меры дуг AB и AB_1, меньших полуокружности, равны.

800 Точки A, B, C и D лежат на окружности. Докажите, что если $\smile AB = \smile CD$, то $AB = CD$.

801 Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая m, пересекающая эти окружности в точках C и D. Докажите, что величина угла CBD не зависит от выбора прямой m.

802 Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая m, пересекающая эти окружности в точках C и D. Через точки C и D проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке K. Докажите, что: а) величина угла CKD не зависит от выбора прямой m; б) четырёхугольник $BCKD$ можно вписать в окружность.

803 На хорде AB окружности с центром O выбрана произвольная точка C. Через точки A, O и C проходит окружность, которая пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что треугольник BCD равнобедренный.

804 Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник — квадрат.

805 Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности радиуса r. Известно, что $AB : CD = 2 : 3$, $AD : BC = 2 : 1$. Найдите стороны четырёхугольника, если его площадь равна S.

806 Докажите, что если прямые, содержащие основания трапеции, касаются окружности, то прямая, проходящая через середины боковых сторон трапеции, проходит через центр этой окружности.

807 Докажите, что если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Решение

Пусть в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (1)$$

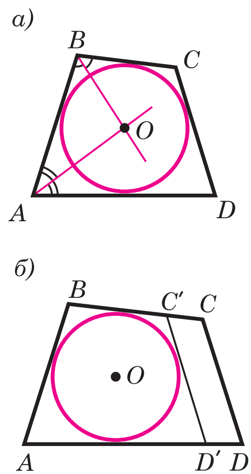


Рис. 272

Точка O пересечения биссектрис углов A и B равноудалена от сторон AD, AB и BC, поэтому можно провести окружность с центром O, касающуюся указанных трёх сторон (рис. 272, *а*). Докажем, что эта окружность касается также стороны CD и, значит, является вписанной в четырёхугольник $ABCD$.

Предположим, что это не так. Тогда прямая CD либо не имеет общих точек с окружностью, либо является секущей. Рассмотрим первый случай (рис. 272, *б*). Проведём касательную $C'D'$, параллельную стороне CD (C' и D' — точки пересечения касательной со сторонами BC и AD). Так как $ABC'D'$ — описанный четырёхугольник, то по свойству его сторон

$$AB + C'D' = BC' + AD'. \qquad (2)$$

Но $BC' = BC - C'C$, $AD' = AD - D'D$, поэтому из равенства (2) получаем:

$$C'D' + C'C + D'D = BC + AD - AB.$$

Правая часть этого равенства в силу (1) равна CD. Таким образом, приходим к равенству

$$C'D' + C'C + D'D = CD,$$

т. е. в четырёхугольнике $C'CDD'$ одна сторона равна сумме трёх других сторон. Но этого не может быть, и, значит, наше предположение ошибочно. Аналогично можно доказать, что прямая CD не может быть секущей окружности. Следовательно, окружность касается стороны CD, что и требовалось доказать.

808 Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольную трапецию с основаниями a и b.

809 Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб — квадрат.

810* Докажите, что если в четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Решение

Пусть в четырёхугольнике $ABCD$

$$\angle A + \angle C = 180°. \qquad (1)$$

Проведём окружность через три вершины четырёхугольника: A, B и D (рис. 273, *а*) — и докажем, что она проходит также через вершину C, т. е. является описанной около четырёхугольника $ABCD$. Предположим, что это не так. Тогда вершина C лежит либо внутри круга, либо вне его. Рассмотрим первый случай (рис. 273, *б*). В этом случае $\angle C = \frac{1}{2}(\smile DAB + \smile EF)$ (объясните почему), и, следовательно, $\angle C > \frac{1}{2} \smile DAB$. Так как $\angle A = \frac{1}{2} \smile BED$, то

$$\angle A + \angle C > \frac{1}{2}(\smile BED + \smile DAB) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°.$$

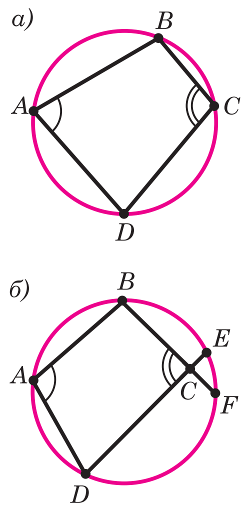


Рис. 273

Итак, мы получили, что $\angle A + \angle C > 180°$. Но это противоречит условию (1), и, значит, наше предположение ошибочно. Аналогично можно доказать, что вершина C не может лежать вне круга. Следовательно, вершина C лежит на окружности, что и требовалось доказать.

811 Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла AOB и пересекающиеся в точке C внутри угла. Докажите, что около четырёхугольника $ACBO$ можно описать окружность.

812 Докажите, что около выпуклого четырёхугольника, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции, можно описать окружность.

813 В прямоугольном треугольнике ABC из точки M стороны AC проведён перпендикуляр MH к гипотенузе AB. Докажите, что углы MHC и MBC равны.

814 Найдите радиус вписанной в равносторонний треугольник окружности, если радиус описанной окружности равен 10 см.

815 Докажите, что если в параллелограмм можно вписать окружность и можно описать около него окружность, то этот параллелограмм — квадрат.

816 В трапецию с основаниями a и b можно вписать окружность и около этой трапеции можно описать окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

817 Даны прямая a, точка A, лежащая на этой прямой, и точка B, не лежащая на ней. Постройте окружность, проходящую через точку B и касающуюся прямой a в точке A.

818 Даны две параллельные прямые и точка, не лежащая ни на одной из них. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных прямых.

819 Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. Докажите, что $\angle AOD + \angle BOC = \angle AOB + \angle COD$.

820 Четырёхугольник вписан в одну окружность и описан около другой. Докажите, что прямые, соединяющие точки касания вписанной окружности с его противоположными сторонами, перпендикулярны.

821 В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 являются серединами дуг AB, BC, CD, DA. Докажите, что прямые A_1C_1 и B_1D_1 перпендикулярны.

822 Около треугольника ABC описана окружность. Биссектрисы его углов A, B и C пересекают эту окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$.

823 Прямые AA_1, BB_1 и CC_1, содержащие высоты остроугольного треугольника ABC, пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что эти прямые содержат биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$.

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе VI

824 Дан выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны. Докажите, что

$$A_1A_2 - A_4A_5 = A_5A_6 - A_2A_3 = A_3A_4 - A_6A_1.$$

825 Положительные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 удовлетворяют условиям $a_1 - a_4 = a_5 - a_2 = a_3 - a_6$. Докажите, что существует выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, все углы которого равны, причём $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $A_3A_4 = a_3$, $A_4A_5 = a_4$, $A_5A_6 = a_5$ и $A_6A_1 = a_6$.

826 Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму произвольного выпуклого четырёхугольника, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

827 Докажите, что диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются.

828 Докажите, что в любом четырёхугольнике какие-то две противоположные вершины лежат по разные стороны от прямой, проходящей через две другие вершины.

829 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Прямая, проведённая через точку D перпендикулярно к AD, пересекает прямую AC в точке E. Точки M и K — основания перпендикуляров, проведённых из точек B и D к прямой AC. Найдите MK, если $AE = a$.

830 Докажите, что в треугольнике сумма трёх медиан меньше периметра, но больше половины периметра.

831 Диагонали выпуклого четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника, периметры которых равны. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

832 Найдите множество середин всех отрезков, соединяющих данную точку со всеми точками данной прямой, не проходящей через эту точку.

833 Докажите, что прямая, проходящая через середины оснований равнобедренной трапеции, перпендикулярна к основаниям. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

834 При пересечении биссектрис всех углов прямоугольника образовался четырёхугольник. Докажите, что этот четырёхугольник — квадрат.

835 На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих квадратов являются вершинами квадрата.

836 На стороне CD квадрата $ABCD$ отмечена точка M. Биссектриса угла BAM пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $AM = BK + DM$.

837 На рисунке 274 изображены три квадрата. Найдите сумму $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$.

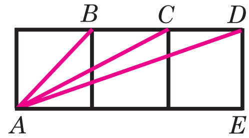


Рис. 274

838 Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка M, что $\angle MAB = 60°$, $\angle MCD = 15°$. Найдите $\angle MBC$.

839 На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, а затем параллелограммы $TCDQ$ и $EBKP$. Докажите, что треугольник APQ прямоугольный и равнобедренный.

840 Постройте равнобедренную трапецию по основаниям и диагонали.

841 Докажите, что если треугольник имеет более, чем одну ось симметрии, то он равносторонний.

Задачи к главе VII

842 Через точку M, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам и пересекающие стороны AB, BC, CD и DA соответственно в точках P, Q, R и T. Докажите, что если точка M лежит на диагонали AC, то площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны и, обратно, если площади параллелограммов $MPBQ$ и $MRDT$ равны, то точка M лежит на диагонали AC.

843 На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K. Отрезки AK и BM пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника CMK, если площади треугольников OMA, OAB и OBK равны соответственно S_1, S_2, S_3.

844 На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты точки M и K, а на отрезке MK — точка P так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{CK}{KB} = \frac{MP}{PK}$. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников AMP и BKP равны S_1 и S_2.

845 Точки P, Q, R и T соответственно — середины сторон AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$. Докажите, что при пересечении прямых AQ, BR, CT и DP образуется параллелограмм, и найдите отношение его площади к площади параллелограмма $ABCD$.

846 Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, проведённый из середины другой боковой стороны к прямой, содержащей первую боковую сторону.

847 Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.

848 Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые делят трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника равна сумме площадей трёх треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции.

849 Прямая, проходящая через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$, пересекает стороны AB и CD в точках M и K. Докажите, что площади треугольников DCM и AKB равны.

850 Сторона AB параллелограмма $ABCD$ продолжена за точку B на отрезок BE, а сторона AD продолжена за точку D на отрезок DK. Прямые ED и KB пересекаются в точке O. Докажите, что площади четырёхугольников $ABOD$ и $CEOK$ равны.

851 Два непересекающихся отрезка делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на три равные части. Докажите, что площадь той части четырёхугольника, которая заключена между этими отрезками, в 3 раза меньше площади самого четырёхугольника.

852 Середины K и M сторон AB и DC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ соединены отрезками KD, KC, MA и MB соответственно с его вершинами. Докажите, что площадь четырёхугольника, заключённого между этими отрезками, равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к сторонам AD и BC.

853 Точка A лежит внутри угла, равного $60°$. Расстояния от точки A до сторон угла равны a и b. Найдите расстояние от точки A до вершины угла.

854 Прямая, проходящая через вершину C параллелограмма $ABCD$, пересекает прямые AB и AD в точках K и M. Найдите площадь этого параллелограмма, если площади треугольников KBC и CDM равны соответственно S_1 и S_2.

855 Через точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезок AB в точке M и отрезок CD в точке K. Прямая, проведённая через точку K параллельно отрезку AB, пересекает отрезок BD в точке T, а прямая, проведённая через точку M параллельно отрезку CD, пересекает отрезок AC в точке E. Докажите, что прямые BE и CT параллельны.

856 Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку A на отрезок AD, равный AC. На лучах BA и BC взяты точки K и M так, что площади треугольников BDM и BCK равны. Найдите угол BKM, если $\angle BAC = \alpha$.

857 Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Известно, что $MB = a$, $MC = b$ и $MD = c$. Найдите длину отрезка MA.

858 В треугольнике ABC проведена высота BD. Отрезок KA перпендикулярен к отрезку AB и равен отрезку DC, отрезок CM перпендикулярен к отрезку BC и равен отрезку AD. Докажите, что отрезки MB и KB равны.

859 Внутри прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C взята точка O так, что справедливо равенство $S_{OAB} = S_{OAC} = S_{OBC}$. Докажите, что справедливо равенство $OA^2 + OB^2 = 5OC^2$.

Задачи к главе VIII

860 На рисунке 275 изображён правильный пятиугольник $ABCDE$, т. е. выпуклый пятиугольник, у которого все углы равны и все стороны равны. Докажите, что:

а) $\triangle AED \sim \triangle AFE$; б) $\dfrac{DA}{DF} = \dfrac{DF}{AF}$.

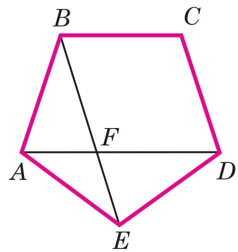


Рис. 275

861 В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) через середину M стороны BC проведена прямая, параллельная биссектрисе угла A, которая пересекает прямые AB и AC соответственно в точках D и E. Докажите, что $BD = CE$.

862 Докажите, что отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, образуют треугольник, в котором эти высоты являются биссектрисами.

863 Точки E и F лежат на стороне AB треугольника ABC, причём точка E лежит на отрезке AF и $AE = BF$. Прямая, проведённая через точку E параллельно стороне AC, пересекает прямую, проведённую через точку F параллельно стороне BC, в точке K. Докажите, что точка K лежит на медиане треугольника ABC, проведённой к стороне AB.

864 Гипотенуза прямоугольного треугольника является стороной квадрата, не перекрывающегося с этим треугольником. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до вершины прямого угла треугольника, если сумма катетов равна a.

865 В треугольнике ABC $\angle A = \frac{180^\circ}{7}$ и $\angle B = \frac{360^\circ}{7}$. Докажите, что $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$.

866 Из точки M внутренней области угла AOB проведены перпендикуляры MP и MQ к его сторонам OA и OB. Из точек P и Q проведены перпендикуляры PR и QS соответственно к OB и OA. Докажите, что $RS \perp OM$.

867 В равнобедренном треугольнике ABC из середины D основания AC проведён перпендикуляр DH к стороне BC. Пусть M — середина отрезка DH. Докажите, что $BM \perp AH$.

868 Из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC проведён перпендикуляр CD к гипотенузе, а из точки D — перпендикуляры DE и DF к катетам AC и BC. Докажите, что:
а) $CD^3 = AB \cdot AE \cdot BF$;
б) $AE^2 + BF^2 + 3CD^2 = AB^2$;
в) $\sqrt[3]{AE^2} + \sqrt[3]{BF^2} = \sqrt[3]{AB^2}$.

869 Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Известно, что $\angle ADP = \frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP = \frac{2}{3}\angle PAD$ и $AD = BD = CD$. а) Найдите все углы четырёхугольника; б) докажите, что $AB^2 = BP \cdot BD$.

870 Точка M не лежит на прямых, содержащих стороны параллелограмма $ABCD$. Докажите, что существуют точки N, P и Q, расположенные так, что A, B, C и D являются соответственно серединами отрезков MN, NP, PQ и QM.

871 Докажите, что если противоположные стороны выпуклого четырёхугольника не параллельны, то их полусумма больше отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон.

872 Докажите, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна половине его периметра, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

873 Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

874 Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Треугольник ABO, где AB — меньшее основание трапеции, равносторонний. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины отрезков OA, OD и BC, равносторонний.

875 Из вершины A треугольника ABC проведены перпендикуляры AM и AK к биссектрисам внешних углов этого треугольника при вершинах B и C. Докажите, что отрезок MK равен половине периметра треугольника ABC.

876 Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 соединяют вершины треугольника ABC с внутренними точками противоположных сторон. Докажите, что середины этих отрезков не лежат на одной прямой.

877 Середины трёх высот треугольника лежат на одной прямой. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

878 В треугольнике ABC, сторона AC которого в 2 раза больше стороны BC, проведены биссектриса CM и биссектриса внешнего угла при вершине C, пересекающая прямую AB в точке K. Докажите, что

$$S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{CMK}.$$

879 Стороны треугольника EFG соответственно равны медианам треугольника ABC. Докажите, что $\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

880 В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A и делящая медиану BM в отношении $1:2$, считая от вершины, пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение площадей треугольников ABK и ABC.

881 Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые BD, CD и BC соответственно в точках M, N и P. Докажите, что отрезок AM является средним пропорциональным между MN и MP.

882 Постройте точку, принадлежащую большему основанию равнобедренной трапеции и отстоящую от данной боковой стороны в n раз дальше, чем от другой ($n = 2, 3, 4$).

883 Точка C лежит на отрезке AB. Постройте точку D прямой AB, не лежащую на отрезке AB, так, чтобы $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$. Всегда ли задача имеет решение?

884 Постройте равнобедренный треугольник по углу между боковыми сторонами и сумме основания и высоты, проведённой к основанию.

885 Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

886 Постройте треугольник ABC, если даны $\angle A$, $\angle C$ и отрезок, равный сумме стороны AC и высоты BH.

887 Постройте треугольник по трём высотам.

888 Постройте трапецию по боковой стороне, большему основанию, углу между ними и отношению двух других сторон.

889 Постройте ромб, площадь которого равна площади данного квадрата, если известно, что отношение диагоналей этого ромба равно отношению данных отрезков.

890 Прямая m, не проходящая через вершины треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC, а также продолжение стороны AC соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Докажите, что верно равенство: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ **(теорема Менелая).**

891 Докажите теорему Менелая (задача 890) для случая, когда точки C_1, A_1 и B_1 лежат на продолжениях сторон AB, BC и AC треугольника ABC.

892 Пусть точки C_1, A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC или их продолжениях. Докажите: если $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, то точки C_1, A_1 и B_1 лежат на одной прямой **(теорема, обратная теореме Менелая).**

893 Пусть точки C_1, A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC или их продолжениях. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то верно равенство: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$ **(теорема Чевы).**

894 Пусть точки C_1, A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC или их продолжениях. Докажите, что если $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке **(теорема, обратная теореме Чевы).**

895 На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ACFK$ и $BCDE$, CH — высота треугольника ABC. Докажите, что прямые CH, BK и AE пересекаются в одной точке.

896 Точки C_1, A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC, причём отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что $\frac{CO}{OC_1} = \frac{CA_1}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}$ **(теорема Ван-Обеля)**.

897 Докажите, что каждая биссектриса треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении суммы прилежащих сторон к противолежащей, считая от вершины.

898 Докажите, что три отрезка, соединяющие вершины треугольника с лежащими на противоположных сторонах точками касания вписанной окружности с этими сторонами, пересекаются в одной точке **(точка Жергонна)**.

899 Докажите, что три отрезка, соединяющие вершины треугольника с лежащими на противоположных сторонах точками касания вневписанных окружностей с этими сторонами, пересекаются в одной точке **(точка Нагеля)**.

Задачи к главе IX

900 Две окружности имеют единственную общую точку M. Через эту точку проведены две секущие, пересекающие одну окружность в точках A и A_1, а другую — в точках B и B_1. Докажите, что $AA_1 \parallel BB_1$.

901 Прямая AC — касательная к окружности с центром O_1, а прямая BD — касательная к окружности с центром O_2 (рис. 276). Докажите, что:
а) $AD \parallel BC$;
б) $AB^2 = AD \cdot BC$;
в) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$.

902 Точки B_1 и C_1 — середины дуг AB и AC (рис. 277). Докажите, что $AM = AN$.

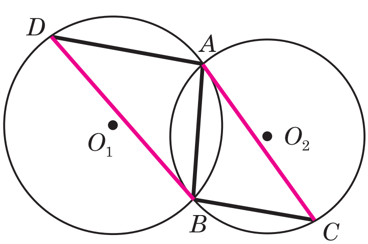


Рис. 276

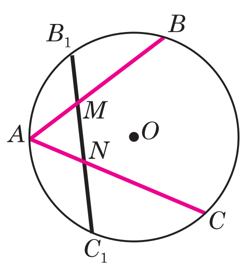


Рис. 277

903 Окружность отсекает на двух прямых, которые пересекаются в точке, не лежащей на окружности, равные хорды. Докажите, что расстояния от точки пересечения этих прямых до концов той и другой хорды соответственно равны между собой.

904 Докажите, что для всех хорд AB данной окружности величина $\frac{AB^2}{AD}$, где AD — расстояние от точки A до касательной в точке B, имеет одно и то же значение.

905 Через точку A пересечения двух окружностей с центрами в точках O_1 и O_2 проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке B, а другую — в точке C. Докажите, что отрезок BC будет наибольшим тогда, когда он параллелен прямой O_1O_2.

906 Отрезок AB является диаметром окружности с центром O. На каждом радиусе OM окружности отложен от центра O отрезок, равный расстоянию от конца M этого радиуса до прямой AB. Найдите множество концов построенных таким образом отрезков.

907 Внутри угла ABC равностороннего треугольника ABC взята точка M так, что $\angle BMC = 30°$, $\angle BMA = 17°$. Найдите углы BAM и BCM.

908 Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла треугольника при этой вершине. Проведённые прямые, пересекаясь, образуют новый треугольник. Докажите, что вершины этого треугольника лежат на прямых, содержащих биссектрисы треугольника ABC.

909 Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC, A_1, B_1, C_1 — точки, симметричные точке H относительно прямых BC, CA, AB, а A_2, B_2, C_2 — точки, симметричные точке H относительно середин сторон BC, CA, AB. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на окружности, описанной около треугольника ABC.

910 Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

911 Из вершины B треугольника ABC проведены высота BH и биссектриса угла B, которая пересекает в точке E описанную около треугольника окружность с центром O. Докажите, что луч BE является биссектрисой угла OBH.

912 Произвольная точка X окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, соединена отрезками с его вершинами. Докажите, что один из отрезков AX, BX и CX равен сумме двух других отрезков.

913 Докажите, что если диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны, то сумма квадратов противоположных сторон четырёхугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

914 В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, биссектрисы углов A и B пересекаются в точке, лежащей на стороне CD. Докажите, что $CD = BC + AD$.

915 Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равна произведению её оснований.

916 Докажите, что в любом четырёхугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон **(теорема Птолемея)**.

917 Докажите, что в любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством $d^2 = R^2 - 2Rr$ **(формула Эйлера)**.

918 Для неравностороннего треугольника ABC точка O является центром описанной окружности, H — точка пересечения прямых, содержащих высоты AA_1, BB_1 и CC_1, точки A_2, B_2, C_2 — середины отрезков AH, BH, CH, а точки A_3, B_3, C_3 — середины сторон треугольника ABC. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности **(окружность Эйлера)**.

919 Докажите, что основания перпендикуляров, проведённых из произвольной точки окружности, описанной около треугольника, к прямым, содержащим стороны этого треугольника, лежат на одной прямой **(прямая Симсона)**.

920 Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

921 Даны окружность с центром O, точка M и отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте прямую p так, чтобы окружность отсекала на ней хорду, равную P_1Q_1, и расстояние от точки M до прямой p равнялось P_2Q_2.

922 Внутри окружности дана точка. Постройте хорду, проходящую через эту точку, так, чтобы она была наименьшей из всех хорд, проходящих через эту точку.

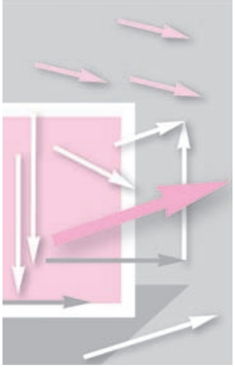
923 Постройте треугольник:

а) по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой к данной стороне;

б) по углу, высоте, проведённой из вершины данного угла, и периметру.

924 Постройте треугольник, если дана описанная окружность и на ней точки A, B и M, через которые проходят прямые, содержащие высоту, биссектрису и медиану треугольника, проведённые из одной вершины.

925 Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте треугольник, для которого эти точки являются основаниями высот. Сколько решений имеет задача?



Глава X

9 класс

Векторы

Эта глава посвящена разработке векторного аппарата геометрии. С помощью векторов можно доказывать теоремы и решать геометрические задачи. Примеры такого применения векторов приведены в данной главе. Но изучение векторов полезно ещё и потому, что они широко используются в физике для описания различных физических величин, таких, например, как скорость, ускорение, сила.

§1 Понятие вектора

84. Понятие вектора

Многие физические величины, например сила, перемещение материальной точки, скорость, характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие физические величины называются **векторными величинами** (или коротко **векторами**).

Рассмотрим пример. Пусть на тело действует сила в 8 Н. На рисунке силу изображают отрезком со стрелкой (рис. 278). Стрелка указывает направление силы, а длина отрезка соответствует в выбранном масштабе числовому значению силы. Так, на рисунке 278 сила в 1 Н изображена отрезком длиной 0,6 см, поэтому сила в 8 Н изображена отрезком длиной 4,8 см.

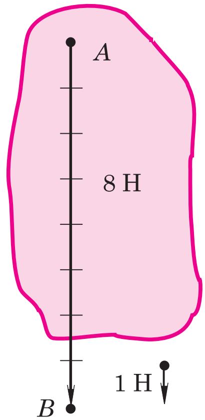


Рис. 278

Отвлекаясь от конкретных свойств физических векторных величин, мы приходим к геометрическому понятию вектора.

Рассмотрим произвольный отрезок. Его концы называются также **граничными точками отрезка**.

На отрезке можно указать два направления: от одной граничной точки к другой и наоборот (рис. 279).

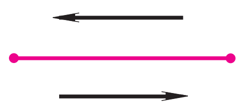


Рис. 279

Чтобы выбрать одно из этих направлений, одну граничную точку отрезка назовём **началом**

отрезка, а другую — **концом отрезка** и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.

Определение

Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется **направленным отрезком** или **вектором.**

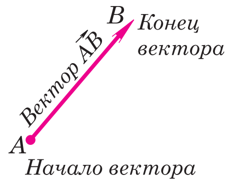


Рис. 280

На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\overrightarrow{AB}$. Первая буква обозначает начало вектора, вторая — конец (рис. 280). На рисунке 281, *а* изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$; точки A, C, E — начала этих векторов, а B, D, F — их концы. Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рис. 281, *б*).

В дальнейшем целесообразно условиться, что любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется **нулевым.** Начало нулевого вектора совпадает с его концом. На рисунке такой вектор изображается одной точкой. Если, например, точка, изображающая нулевой вектор, обозначена буквой M, то данный нулевой вектор можно обозначить так: $\overrightarrow{MM}$ (рис. 281, *а*). Нулевой вектор обозначается также символом $\vec{0}$. На рисунке 281 векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ ненулевые, а вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой.

Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ (вектора $\vec{a}$) обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$ ($|\vec{a}|$). Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}|=0$.

Длины векторов, изображённых на рисунках 281, *а* и 281, *б*, таковы: $|\overrightarrow{AB}|=6$, $|\overrightarrow{CD}|=5$, $|\overrightarrow{EF}|=2{,}5$, $|\overrightarrow{MM}|=0$, $|\vec{a}|=\sqrt{13}$, $|\vec{b}|=4{,}5$, $|\vec{c}|=3$ (каждая клетка на рисунке 281 имеет сторону, равную единице измерения отрезков).

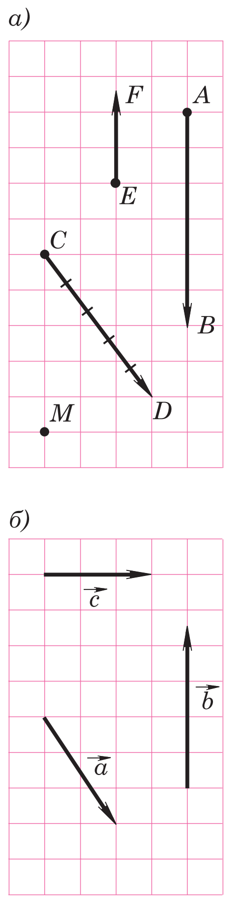


Рис. 281

85. Равенство векторов

Прежде чем дать определение равных векторов, обратимся к примеру. Рассмотрим движение тела, при котором все его точки движутся с одной и той же скоростью и в одном и том же направлении.

Скорость каждой точки M тела является векторной величиной, поэтому её можно изобразить направленным отрезком, начало которого совпадает с точкой M (рис. 282). Так как все точки тела движутся с одной и той же скоростью, то все направленные отрезки, изображающие скорости этих точек, имеют одно и то же направление и длины их равны.

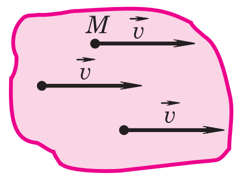


Рис. 282

Этот пример подсказывает нам, как определить равенство векторов.

Предварительно введём понятие коллинеарных векторов.

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых; нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

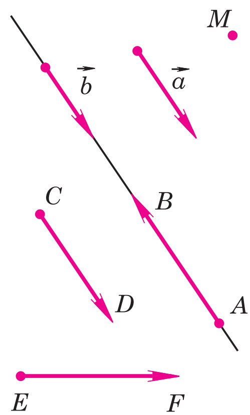


Рис. 283

На рисунке 283 векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MM}$ (вектор $\overrightarrow{MM}$ нулевой) коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$, а также $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ не коллинеарны.

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **сонаправленными**, а во втором — **противоположно направленными**[1]. Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается

[1] Нетрудно дать и точное определение этих понятий. Например, два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются сонаправленными (противоположно направленными), если их концы лежат по одну сторону (по разные стороны) от прямой, проходящей через начала. Как сформулировать аналогичное определение для ненулевых векторов, лежащих на одной прямой?

следующим образом: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, то это обозначают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. На рисунке 283 изображены как сонаправленные, так и противоположно направленные векторы: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$, $\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Начало нулевого вектора совпадает с его концом, поэтому нулевой вектор не имеет какого-либо определённого направления. Иначе говоря, любое направление можно считать направлением нулевого вектора. Условимся считать, что нулевой вектор сонаправлен с любым вектором. Таким образом, на рисунке 283 $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и т. д.

Ненулевые коллинеарные векторы обладают свойствами, которые проиллюстрированы на рисунке 284, *а—в*.

Дадим теперь определение равных векторов.

Определение

Векторы называются **равными,** если они сонаправлены и их длины равны.

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} = \vec{b}$.

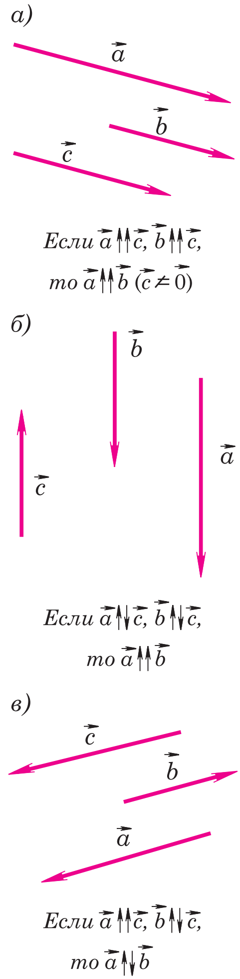
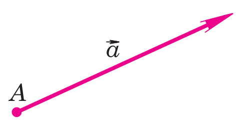


Рис. 284

86. Откладывание вектора от данной точки

Если точка A — начало вектора $\vec{a}$, то говорят, что **вектор $\vec{a}$ отложен от точки A** (рис. 285). Докажем следующее утверждение:

от любой точки M можно отложить вектор, равный данному вектору $\vec{a}$, и притом только один.



Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A

Рис. 285

В самом деле, если $\vec{a}$ — нулевой вектор, то искомым вектором является вектор $\overrightarrow{MM}$.

Допустим, что вектор $\vec{a}$ ненулевой, а точки A и B — его начало и конец. Проведём через точку M прямую p, параллельную AB (рис. 286; если M — точка прямой AB, то в качестве прямой p возьмём саму прямую AB). На прямой p отложим отрезки MN и MN', равные отрезку AB, и выберем из векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{MN'}$ тот, который сонаправлен с вектором $\vec{a}$ (на рисунке 286 вектор $\overrightarrow{MN}$). Этот вектор и является искомым вектором, равным вектору $\vec{a}$. Из построения следует, что такой вектор только один.

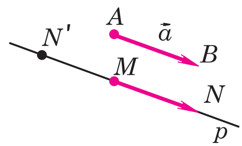


Рис. 286

Замечание

Равные векторы, отложенные от разных точек, часто обозначают одной и той же буквой. Так обозначены, например, равные векторы скорости различных точек на рисунке 282. Иногда про такие векторы говорят, что это один и тот же вектор, но отложенный от разных точек.

Практические задания

926 Отметьте точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Начертите все ненулевые векторы, начало и конец которых совпадают с какими-то двумя из этих точек. Выпишите все полученные векторы и укажите начало и конец каждого вектора.

927 Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы, изображающие полёт самолёта сначала на 300 км на юг от города A до B, а потом на 500 км на восток от города B до C. Затем начертите вектор $\overrightarrow{AC}$, который изображает перемещение из начальной точки в конечную.

928 Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ так, чтобы:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 1$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 2{,}5$ см, $|\overrightarrow{EF}| = 4{,}5$ см;

б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ были не коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 3$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 1{,}5$ см, $|\overrightarrow{EF}| = 1$ см.

929 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Изобразите несколько векторов: а) сонаправленных с вектором $\vec{a}$; б) сонаправленных с вектором $\vec{b}$; в) противоположно направленных вектору $\vec{b}$; г) противоположно направленных вектору $\vec{a}$.

930 Начертите два вектора: а) имеющие равные длины и неколлинеарные; б) имеющие равные длины и сонаправленные; в) имеющие равные длины и противоположно направленные. В каком случае полученные векторы равны?

931 Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$ и отметьте на плоскости три точки A, B и C. Отложите от точек A, B и C векторы, равные $\vec{a}$.

Задачи

932 Какие из следующих величин являются векторными: скорость, масса, сила, время, температура, длина, площадь, работа?

933 В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, точка M — середина стороны AB. Найдите длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$.

934 Основание AD прямоугольной трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB = 5$ см, $\angle D = 45°$. Найдите длины векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AC}$.

935 Выпишите пары коллинеарных векторов, которые определяются сторонами: а) параллелограмма $MNPQ$; б) трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC; в) треугольника FGH. Укажите среди них пары сонаправленных и противоположно направленных векторов.

936 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$? Ответ обоснуйте.

937 Точки S и T являются серединами боковых сторон MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{NL}$ и $\overrightarrow{KL}$; б) $\overrightarrow{MS}$ и $\overrightarrow{SN}$; в) $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{KL}$; г) $\overrightarrow{TS}$ и $\overrightarrow{KM}$; д) $\overrightarrow{TL}$ и $\overrightarrow{KT}$?

938 Докажите, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны, то середины отрезков AD и BC совпадают. Докажите обратное утверждение: если середины отрезков AD и BC совпадают, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

939 Определите вид четырёхугольника $ABCD$, если: а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$; б) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{DC}$, а векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарны.

940 Верно ли утверждение: а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; б) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; г) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$; д) если $\vec{a} = \vec{0}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$?

§ 2 Сложение и вычитание векторов

87. Сумма двух векторов

Рассмотрим пример. Пусть материальная точка переместилась из точки A в точку B, а затем из точки B в точку C (рис. 287). В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, материальная точка переместилась из точки A в точку C. Поэтому результирующее перемещение можно представить вектором $\overrightarrow{AC}$. Поскольку перемещение из точки A в точку C складывается из перемещения из A в B и перемещения из B в C, то вектор $\overrightarrow{AC}$ естественно назвать суммой векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

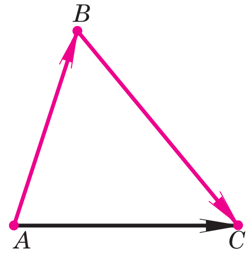


Рис. 287

Рассмотренный пример приводит нас к понятию суммы двух векторов.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора. Отметим произвольную точку A и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$ (рис. 288). Затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

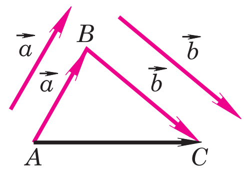


Рис. 288

Такое правило сложения векторов называется **правилом треугольника**. Рисунок 288 поясняет это название.

Докажем, что если при сложении векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точку A, от которой откладывается вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, заменить другой точкой A_1, то вектор $\overrightarrow{AC}$ заменится равным ему вектором $\overrightarrow{A_1C_1}$. Иными словами, докажем, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (рис. 289).

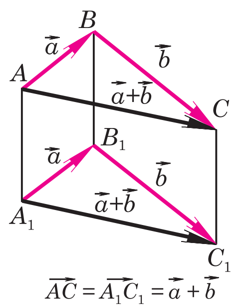


Рис. 289

Допустим, что точки A, B, A_1, точки B, C, B_1 и точки A, C, A_1 не лежат на одной прямой (остальные случаи рассмотрите самостоятельно). Из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ следует, что стороны AB и A_1B_1 четырёхугольника ABB_1A_1 равны и параллельны, поэтому этот четырёхугольник —

параллелограмм. Следовательно, $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$. Аналогично из равенства $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ следует, что четырёхугольник BCC_1B_1 — параллелограмм. Поэтому $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. На основе полученных равенств заключаем, что $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Поэтому AA_1C_1C — параллелограмм, и, значит, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, что и требовалось доказать.

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} + \vec{b}$.

Складывая по правилу треугольника произвольный вектор $\vec{a}$ с нулевым вектором, получаем, что **для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство**

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

Правило треугольника можно сформулировать также следующим образом: **если A, B и C — произвольные точки, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.** Подчеркнём, что это равенство справедливо для произвольных точек A, B и C, в частности, в том случае, когда две из них или даже все три совпадают.

88. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы равенства:
1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон).
2^0. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).

Доказательство

1^0. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (случай коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ рассмотрите самостоятельно). От произвольной точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и на этих векторах построим параллелограмм $ABCD$, как показано на рисунке 290. По правилу треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$. Аналогично $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$. Отсюда следует, что $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2^0. От произвольной точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, от точки B — вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, а от точки C — вектор $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$ (рис. 291). Применяя правило треугольника, получим:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD},$$
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}.$$

Отсюда следует, что $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Теорема доказана.

При доказательстве утверждения 1^0 мы обосновали так называемое **правило параллелограмма** сложения неколлинеарных векторов: чтобы сложить неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно отложить от какой-нибудь точки A векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и построить параллелограмм $ABCD$ (рис. 290). Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ равен $\vec{a} + \vec{b}$. Правило параллелограмма часто используется в физике, например при сложении двух сил.

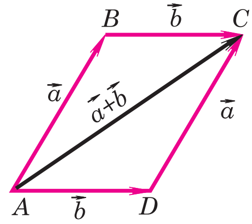


Рис. 290

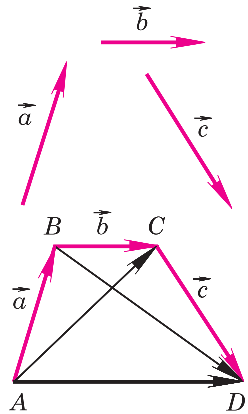
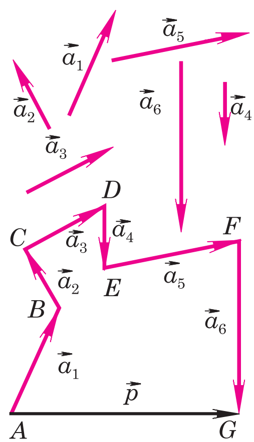


Рис. 291

89. Сумма нескольких векторов

Сложение нескольких векторов производится следующим образом: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма складывается с третьим вектором и т. д. Из законов сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются. На рисунке 291 показано построение суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: от произвольной точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, затем от точки B отложен вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ и, наконец, от точки C отложен вектор $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$. В результате получается вектор $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



$\vec{p} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \vec{a}_6$

Рис. 292

Аналогично можно построить сумму четырёх, пяти и вообще любого числа векторов. На рисунке 292 показано построение суммы шести векторов. Это правило построения суммы нескольких векторов называется **правилом многоугольника**. Рисунок 292 поясняет название.

Правило многоугольника можно сформулировать также следующим образом: если A_1, A_2, ..., A_n — произвольные точки плоскости, то $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$ (на рисунке 293, *а* $n = 7$). Это равенство справедливо для любых точек A_1, A_2, ..., A_n, в частности в том случае, когда некоторые из них совпадают. Например, если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору (рис. 293, *б*).

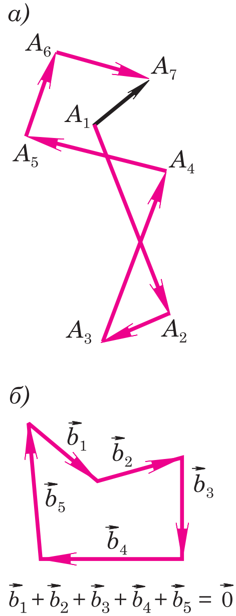


Рис. 293

90. Вычитание векторов

Разностью векторов $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

Рассмотрим задачу о построении разности двух векторов.

Задача

Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Построить вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение

Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 294). По правилу треугольника $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ или $\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a}$. Таким образом, сумма векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}$ равна $\vec{a}$. По определению разности векторов это означает, что $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, т. е. вектор $\overrightarrow{BA}$ искомый. Задачу о построении разно-

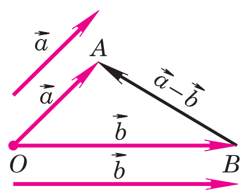


Рис. 294

сти двух векторов можно решить и другим способом. Прежде чем указать этот способ, введём понятие вектора, противоположного данному.

Пусть $\vec{a}$ — произвольный ненулевой вектор. Вектор $\vec{a}_1$ называется **противоположным** вектору $\vec{a}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}_1$ имеют равные длины и противоположно направлены. На рисунке 295 вектор $\vec{a}_1 = \overrightarrow{BA}$ является противоположным вектору $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Вектором, противоположным нулевому вектору, считается нулевой вектор.

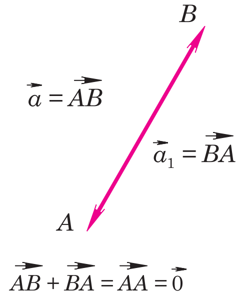


Рис. 295

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается так: $-\vec{a}$. Очевидно, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Докажем теперь теорему о разности двух векторов.

Теорема

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Доказательство

По определению разности векторов $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}$. Прибавив к обеим частям этого равенства вектор $(-\vec{b})$, получим:

$$(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

$$\text{или } (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{0} = \vec{a} + (-\vec{b}),$$

откуда $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Теорема доказана.

Приведём другое решение задачи о построении разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 296). Затем от точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$. По теореме о разности векторов $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, поэтому $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, т. е. вектор $\overrightarrow{OB}$ искомый.

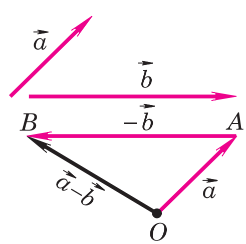


Рис. 296

Практические задания

941 Турист прошёл 20 км на восток из города A в город B, а потом 30 км на восток в город C. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$?

942 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{x}+\vec{z}$, $\vec{z}+\vec{y}$.

943 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$.

944 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ и постройте векторы $\vec{x}-\vec{y}$, $\vec{z}-\vec{y}$, $\vec{x}-\vec{z}$, $-\vec{x}$, $-\vec{y}$, $-\vec{z}$.

945 Начертите векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x}\uparrow\uparrow\vec{y}$, $\vec{x}\uparrow\downarrow\vec{z}$. Постройте векторы $\vec{x}+\vec{y}$, $\vec{y}-\vec{z}$, $\vec{x}+\vec{z}$.

946 Начертите два ненулевых коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$. Постройте векторы: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $-\vec{a}+\vec{b}$. Выполните ещё раз построение для случая, когда $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Задачи

947 Дан произвольный четырёхугольник $MNPQ$. Докажите, что: а) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QP}$.

948 Докажите, что для любых двух неколлинеарных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство $|\vec{x}+\vec{y}|<|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

949 Докажите, что если A, B, C, и D — произвольные точки, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

950 Сторона равностороннего треугольника ABC равна a. Найдите: а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$; в) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|$; г) $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; д) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$.

951 В треугольнике ABC: $AB=6$, $BC=8$, $\angle B=90°$. Найдите: а) $|\overrightarrow{BA}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{BA}|+|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$; г) $|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{BC}|$ и $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}|$.

952 Пользуясь правилом многоугольника, упростите выражение:
а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{KD})$;
б) $(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})-(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KD})$.

953 Пусть X, Y и Z — произвольные точки. Докажите, что векторы $\vec{p} = \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{YZ}$, $\vec{q} = (\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{XZ}) + \overrightarrow{YZ}$ и $\vec{r} = (\overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XY}) - \overrightarrow{ZX}$ нулевые.

954 На рисунке 297 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\overrightarrow{XY}$. Представьте вектор $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы остальных или им противоположных векторов.

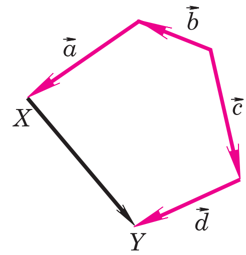


Рис. 297

955 Дан треугольник ABC. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Решение

а) Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ — противоположные, поэтому $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

б) По правилу треугольника $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, поэтому $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}$.

956 Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$.

957 Отрезок BB_1 — медиана треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ через $\vec{x} = \overrightarrow{AB_1}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{AB}$.

958 Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если: а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$; б) $\vec{a} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$; в) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$.

959 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ векторы: $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA}$.

960 Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD}$, где X — произвольная точка плоскости.

961 Докажите, что для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливо неравенство $|\vec{x} - \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}|$. В каком случае $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$?

962 Парашютист спускался на землю со скоростью 3 м/с. Порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью $3\sqrt{3}$ м/с. Под каким углом к вертикали спускается парашютист?

§3 Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач

91. Произведение вектора на число

Прежде чем ввести ещё одно действие — умножение вектора на число, обратимся к примеру. Представим себе, что один автомобиль движется прямолинейно с постоянной скоростью, второй автомобиль движется в том же направлении со скоростью, вдвое большей, а третий автомобиль движется им навстречу, т. е. в противоположном направлении, и величина его скорости такая же, как у второго автомобиля. Если мы изобразим скорость первого автомобиля вектором $\vec{v}$ (рис. 298, *а*), то естественно изобразить скорость второго автомобиля вектором, у которого направление такое же, как у вектора $\vec{v}$, а длина в 2 раза больше, и обозначить этот вектор $2\vec{v}$. Скорость третьего автомобиля логично изобразить вектором, противоположным вектору $2\vec{v}$, т. е. вектором $-2\vec{v}$ (см. рис. 298, *а*). Естественно считать, что вектор $2\vec{v}$ получается умножением вектора $\vec{v}$ на число 2, а вектор $-2\vec{v}$ получается умножением вектора $\vec{v}$ на число -2. Этот пример подсказывает, каким образом следует ввести умножение вектора на число.

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k \geqslant 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. На рисунке 298, *б* изображены вектор $\vec{a}$ и векторы $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $\sqrt{2}\vec{a}$.

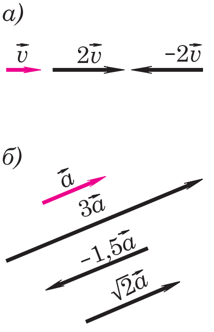


Рис. 298

Из определения произведения вектора на число непосредственно следует, что:

1) **произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;**

2) **для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.**

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами:

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

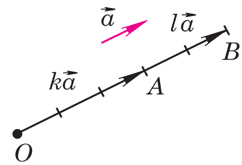
1^0. $(kl)\,\vec{a} = k\,(l\vec{a})$ (сочетательный закон).

2^0. $(k + l)\,\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ (первый распределительный закон).

3^0. $k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (второй распределительный закон).

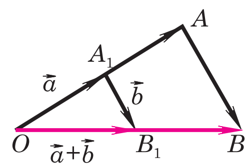
$\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} = 2(3\vec{a})$
$\overrightarrow{OB} = 6\vec{a} = (2 \cdot 3)\vec{a}$

Рис. 299



$\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = l\vec{a}$
$\overrightarrow{OB} = (k+l)\vec{a} = k\vec{a}+l\vec{a}$

Рис. 300



$\overrightarrow{OB} = k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a}+k\vec{b}$

Рис. 301

Рисунок 299 иллюстрирует сочетательный закон. На этом рисунке представлен случай, когда $k = 2$, $l = 3$.

Рисунок 300 иллюстрирует первый распределительный закон. Этот рисунок соответствует случаю, когда $k = 3$, $l = 2$.

Рисунок 301 иллюстрирует второй распределительный закон. На этом рисунке треугольники OAB и OA_1B_1 подобны с коэффициентом подобия k, поэтому $\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$, $\overrightarrow{OB} = k\,(\vec{a} + \vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a} + k\vec{b}$. Таким образом, $k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Замечание

Рассмотренные нами свойства действий над векторами позволяют в выражениях, содержащих суммы, разности векторов и произведения векторов на числа, выполнять преобразования по тем же правилам, что и в числовых выражениях. Например, выражение $\vec{p} = 2\,(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} + \vec{a}) - 3\,(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a})$ можно преобразовать так:

$$\vec{p} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} - 3\vec{a} = -5\vec{b} + 4\vec{c}.$$

92. Применение векторов к решению задач

Векторы могут использоваться для решения геометрических задач и доказательства теорем. Приведём примеры. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу.

Задача 1

Точка C — середина отрезка AB, а O — произвольная точка плоскости (рис. 302). Доказать, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

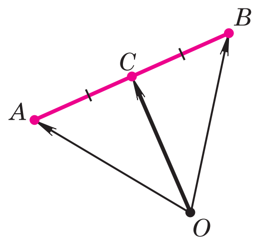


Рис. 302

Решение

По правилу треугольника $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$. Складывая эти равенства, получаем: $2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$. Так как точка C — середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$. Таким образом, $2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, или

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Задача 2

Доказать, что прямая, проведённая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон.

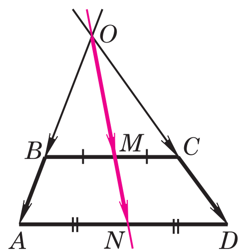


Рис. 303

Решение

Пусть $ABCD$ — данная трапеция, M и N — середины оснований BC и AD, а O — точка пересечения прямых AB и CD (рис. 303). Докажем, что точка O лежит на прямой MN.

Треугольники OAD и OBC подобны по первому признаку подобия треугольников (докажите это), поэтому $\frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = k$.

Так как $\overrightarrow{OB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OD}$, то

$$\overrightarrow{OA} = k \cdot \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

Точка M — середина отрезка BC, поэтому $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Аналогично $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD})$.

Подставив в это равенство выражения (1) для $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD}$, получим:

$$\overrightarrow{ON} = k \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = k \cdot \overrightarrow{OM}.$$

Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, и, значит, точка O лежит на прямой MN.

Напомним, что **средней линией** трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. Докажем теорему о средней линии трапеции.

Теорема

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 304). Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$.

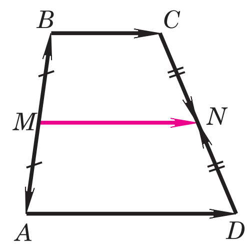


Рис. 304

По правилу многоугольника

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \text{ и } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}).$$

Но M и N — середины сторон AB и CD, поэтому $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, откуда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ также сонаправлены, а длина вектора $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ равна $AD + BC$. Отсюда следует, что $MN \parallel AD$ и $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$.

Теорема доказана.

Практические задания

963 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, начала которых не совпадают, и отметьте какую-нибудь точку O. От точки O отложите векторы, равные $2\vec{p}$ и $\frac{1}{2}\vec{q}$.

964 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и постройте векторы: а) $\vec{x}+2\vec{y}$; б) $\frac{1}{2}\vec{y}+\vec{x}$; в) $3\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; г) $1\frac{1}{2}\vec{x}-3\vec{y}$; д) $0\vec{x}+4\vec{y}$; е) $-2\vec{x}+0\vec{y}$. Выполните задания а) — е) для двух коллинеарных ненулевых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

965 Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{p}$ и $\vec{q}$, начала которых не совпадают. Постройте векторы $\vec{m}=2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{l}=-2\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{q}$, $\vec{s}=\frac{2}{3}\vec{q}-\vec{p}$.

966 Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте векторы: а) $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$; б) $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

Задачи

967 Дан вектор $\vec{p}=3\vec{a}$, где $\vec{a}\neq\vec{0}$. Как направлен каждый из векторов $\vec{a}$, $-\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $6\vec{a}$ по отношению к вектору $\vec{p}$? Выразите длины этих векторов через $|\vec{p}|$.

968 Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливы равенства: а) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; б) $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$.

969 Пусть $\vec{x}=\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{y}=\vec{m}-\vec{n}$. Выразите через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ векторы: а) $2\vec{x}-2\vec{y}$; б) $2\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$; в) $-\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

970 В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны AD, точка G — середина стороны BC. Выразите векторы $\overrightarrow{EC}$ и $\overrightarrow{AG}$ через векторы $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.

971 Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$, причём $BM : MC = 3 : 1$. Выразите векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MD}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

972 В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а M — такая точка на стороне AD, что $AM=\frac{1}{2}MD$. Выразите через векторы $\vec{x}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{y}=\overrightarrow{AB}$ следующие векторы:

а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$;

б) $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{OM}$.

973 Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}).$$

974 Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AC}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

975 Точка O — середина медианы EG треугольника DEF. Выразите вектор $\overrightarrow{DO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{ED}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{EF}$.

Применение векторов к решению задач

976 Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольника ABC.

Решение

Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Тогда

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\qquad \overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}),\qquad \overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$$

(см. задачу 1, п. 92). Сложив эти равенства, получим

$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}))=\vec{0}.$$

Отсюда следует, что если мы построим сумму векторов $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ по правилу многоугольника (п. 89), то получим треугольник, удовлетворяющий условиям задачи (треугольник MNP на рисунке 305).

977 На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

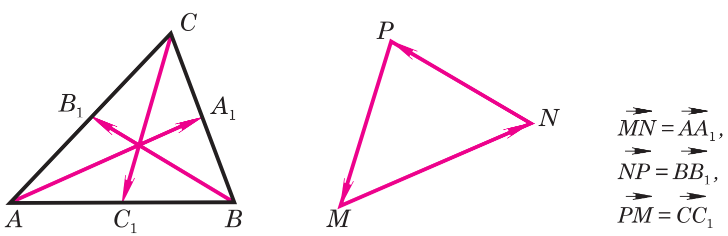


Рис. 305

978 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен полуразности оснований.

979 Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырёхугольника, точкой пересечения делятся пополам.

980 Докажите теорему о средней линии треугольника (п. 69) с помощью векторного метода.

981 Боковые стороны трапеции равны 13 см и 15 см, а периметр равен 48 см. Найдите среднюю линию трапеции.

982 Сторона AB треугольника ABC разделена на четыре равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные стороне BC. Стороны AB и AC треугольника отсекают на этих параллельных прямых три отрезка, наименьший из которых равен 3,4 см. Найдите два других отрезка.

983 Найдите диаметр окружности, если его концы удалены от некоторой касательной на 18 см и 12 см.

984 Из концов диаметра CD данной окружности проведены перпендикуляры CC_1 и DD_1 к касательной, не перпендикулярной к диаметру CD. Найдите DD_1, если $CC_1 = 11$ см, а $CD = 27$ см.

985 Докажите, что средняя линия трапеции проходит через середины диагоналей.

986 Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 48 см, а средняя линия делится диагональю на два отрезка, равные 11 см и 35 см. Найдите углы трапеции.

987 Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. Перпендикуляр, проведённый из вершины B к большему основанию AD, делит это основание на два отрезка, больший из которых равен 7 см. Найдите среднюю линию трапеции.

Вопросы для повторения к главе X

1 Приведите примеры векторных величин, известных вам из курса физики.

2 Дайте определение вектора. Объясните, какой вектор называется нулевым.

3 Что называется длиной ненулевого вектора? Чему равна длина нулевого вектора?

4 Какие векторы называются коллинеарными? Изобразите на рисунке сонаправленные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и противоположно направленные векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

5 Дайте определение равных векторов.

6 Объясните смысл выражения: «Вектор $\vec{a}$ отложен от точки A». Докажите, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

7 Объясните, какой вектор называется суммой двух векторов. В чём заключается правило треугольника сложения двух векторов?

8 Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

9 Сформулируйте и докажите теорему о законах сложения векторов.

10 В чём заключается правило параллелограмма сложения двух неколлинеарных векторов?

11 В чём заключается правило многоугольника сложения нескольких векторов?

12 Какой вектор называется разностью двух векторов? Постройте разность двух данных векторов.

13 Какой вектор называется противоположным данному? Сформулируйте и докажите теорему о разности векторов.

14 Какой вектор называется произведением данного вектора на данное число?

15 Чему равно произведение $k\vec{a}$, если: а) $\vec{a}=\vec{0}$; б) $k=0$?

16 Могут ли векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ быть неколлинеарными?

17 Сформулируйте основные свойства умножения вектора на число.

18 Приведите пример применения векторов к решению геометрических задач.

19 Какой отрезок называется средней линией трапеции?

20 Сформулируйте и докажите теорему о средней линии трапеции.

Дополнительные задачи

988 Докажите, что если векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, то $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|+|\vec{n}|$, а если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены, причём $|\vec{m}|\geqslant|\vec{n}|$, то $|\vec{m}+\vec{n}|=|\vec{m}|-|\vec{n}|$.

989 Докажите, что для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ справедливы неравенства $|\vec{x}|-|\vec{y}|\leqslant|\vec{x}+\vec{y}|\leqslant|\vec{x}|+|\vec{y}|$.

990 На стороне BC треугольника ABC отмечена точка N так, что $BN=2NC$. Выразите вектор $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$.

991 На сторонах MN и NP треугольника MNP отмечены соответственно точки X и Y так, что $\frac{MX}{XN} = \frac{3}{2}$ и $\frac{NY}{YP} = \frac{3}{2}$. Выразите векторы $\overrightarrow{XY}$ и $\overrightarrow{MP}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{NM}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{NP}$.

992 Основание AD трапеции $ABCD$ в 3 раза больше основания BC. На стороне AD отмечена такая точка K, что $AK = \frac{1}{3}AD$. Выразите векторы $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.

993 Три точки A, B и C расположены так, что $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC}.$$

994 Точка C делит отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A. Докажите, что для любой точки O справедливо равенство

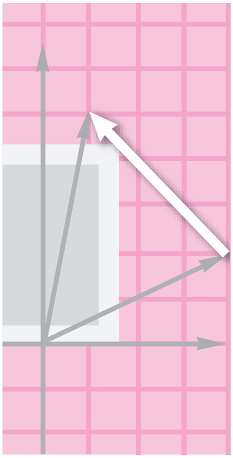
$$\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

995* Точки A и C — середины противоположных сторон произвольного четырёхугольника, а точки B и D — середины двух других его сторон. Докажите, что для любой точки O верно равенство

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

996 Один из углов прямоугольной трапеции равен 120°. Найдите её среднюю линию, если меньшая диагональ и бóльшая боковая сторона трапеции равны a.

997 Докажите, что вершина угла, образованного биссектрисами двух углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, лежит на прямой, содержащей среднюю линию трапеции.



Глава XI

Метод координат

С понятием декартовой прямоугольной системы координат вы знакомы по курсу алгебры. Введение системы координат позволяет описывать геометрические фигуры, в частности окружности и прямые, с помощью уравнений, что даёт возможность применять в геометрии алгебраические методы. Так, например, написав уравнения двух данных окружностей, можно с их помощью исследовать взаимное расположение этих окружностей. Наряду с координатами точек будут введены координаты векторов и тем самым будет расширен координатно-векторный аппарат геометрии.

§1 Координаты вектора

93. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Докажем сначала лемму о коллинеарных векторах.

Лемма

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Доказательство

Возможны два случая: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Возьмём число $k = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k \geqslant 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены (рис. 306, *а*). Кроме того, их длины равны:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Поэтому $\vec{b} = k\vec{a}$.

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Возьмём число $k = -\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Так как $k < 0$, то векторы $k\vec{a}$ и $\vec{b}$ снова сонаправлены (рис. 306, *б*). Их длины также равны:

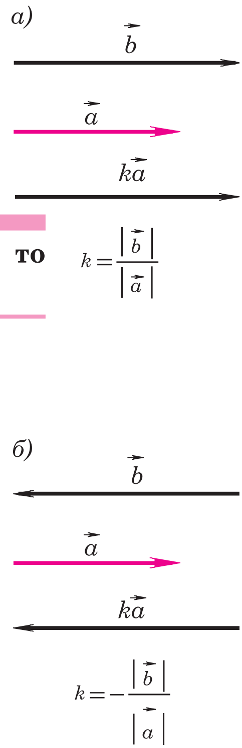


Рис. 306

$$|k\vec{a}| = |k||\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|.$$

Поэтому $\vec{b} = k\vec{a}$. **Лемма доказана.**

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y — некоторые числа, то говорят, что **вектор $\vec{p}$ разложен по векторам** $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Числа x и y называются **коэффициентами разложения.**

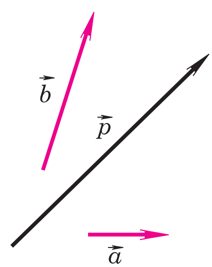
Докажем теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

Теорема

На плоскости любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — данные неколлинеарные векторы. Докажем сначала, что любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Возможны два случая.



1) Вектор $\vec{p}$ коллинеарен одному из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, например вектору $\vec{b}$. В этом случае по лемме о коллинеарных векторах вектор $\vec{p}$ можно представить в виде $\vec{p} = y\vec{b}$, где y — некоторое число, и, следовательно, $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, т. е. вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) Вектор $\vec{p}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$. Отметим какую-нибудь точку O и отложим от неё векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ (рис. 307). Через точку P проведём прямую, параллельную прямой OB, и обозначим через A_1 точку пересечения этой прямой с прямой OA. По правилу треугольника $\vec{p} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P}$. Но векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1P}$ коллинеарны соответственно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому существуют такие чис-

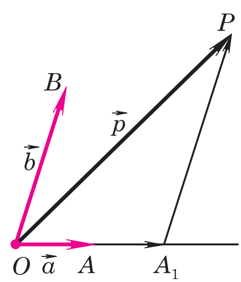


Рис. 307

ла x и y, что $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P} = x\vec{b}$. Следовательно, $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т. е. вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Докажем теперь, что коэффициенты x и y разложения определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ имеет место другое разложение $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$. Вычитая второе равенство из первого и используя правила действий над векторами, получаем $\vec{0} = (x - x_1)\,\vec{a} + (y - y_1)\,\vec{b}$. Это равенство может выполняться только в том случае, когда коэффициенты $x - x_1$ и $y - y_1$ равны нулю. В самом деле, если предположить, например, что $x - x_1 \neq 0$, то из полученного равенства найдём $\vec{a} = \frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$, а значит, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, $x - x_1 = 0$ и $y - y_1 = 0$, откуда $x = x_1$ и $y = y_1$. Это и означает, что коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ определяются единственным образом.

Теорема доказана.

Замечание

Два данных неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **векторным базисом**, а представление вектора $\vec{p}$ в виде $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$ — разложением вектора $\vec{p}$ по базисным векторам.

94. Координаты вектора

Понятие **прямоугольной системы координат** (или, как иногда говорят, декартовой системы координат) нам известно из курса алгебры.

Напомним, что для задания прямоугольной системы координат нужно провести две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрать направление (оно обозначается стрелкой) и выбрать единицу измерения отрезков. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом. В дальнейшем под длиной отрезка мы будем понимать это число.

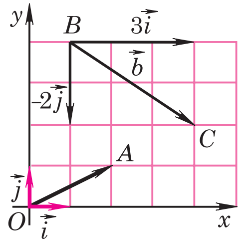


Рис. 308

Отложим от начала координат O единичные векторы (т. е. векторы, длины которых равны 1) $\vec{i}$ и $\vec{j}$ так, чтобы направление вектора $\vec{i}$ совпало с направлением оси Ox, а направление вектора $\vec{j}$ — с направлением оси Oy (рис. 308). Векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ назовём **координатными векторами**.

Координатные векторы не коллинеарны, поэтому любой вектор $\vec{p}$ можно разложить по координатным векторам, т. е. представить в виде $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$, причём коэффициенты разложения (числа x и y) определяются единственным образом.

Коэффициенты разложения вектора $\vec{p}$ по координатным векторам называются **координатами вектора** $\vec{p}$ в данной системе координат. Координаты вектора будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\vec{p}\{x; y\}$. На рисунке 308 $\overrightarrow{OA}\{2; 1\}$ и $\vec{b}\{3; -2\}$. Так как нулевой вектор можно представить в виде $\vec{0} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$, то его координаты равны нулю: $\vec{0}\{0; 0\}$.

Если векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ равны, то $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Таким образом, **координаты равных векторов соответственно равны.**

Рассмотрим правила, позволяющие по координатам векторов находить координаты их суммы, разности и произведения вектора на число.

1^0. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

Докажем это утверждение для двух векторов. Рассмотрим векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$. Так как $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$, то, пользуясь свойствами сложения векторов и умножения вектора на число, получим:

$$\vec{a}+\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}=(x_1+x_2)\,\vec{i}+(y_1+y_2)\,\vec{j}.$$

Отсюда следует, что координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны $\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$.

Аналогично доказывается утверждение:

2^0. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

Иными словами, если $\vec{a}\,\{x_1;\ y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2;\ y_2\}$ — данные векторы, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты $\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$. Проведите доказательство самостоятельно.

3^0. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

В самом деле, пусть вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{x;\ y\}$. Найдём координаты вектора $k\vec{a}$, где k — произвольное число. Так как $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$, то $k\vec{a}=kx\vec{i}+ky\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты вектора $k\vec{a}$ равны $\{kx;\ ky\}$.

Рассмотренные правила позволяют определить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов с известными координатами. Пусть, например, требуется найти координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$, если известно, что $\vec{a}\,\{1;\ -2\}$, $\vec{b}\,\{0;\ 3\}$, $\vec{c}\,\{-2;\ 3\}$.

По правилу 3^0 вектор $2\vec{a}$ имеет координаты $\{2;\ -4\}$, а вектор $-\frac{1}{3}\vec{b}$ — координаты $\{0;\ -1\}$. Так как $\vec{p}=(2\vec{a})+(-\frac{1}{3}\vec{b})+\vec{c}$, то координаты вектора $\vec{p}$ можно найти по правилу 1^0: $\{2+0-2;\ -4-1+3\}$. Итак, вектор $\vec{p}$ имеет координаты $\{0;\ -2\}$.

Задачи

998 Найдите такое число k, чтобы выполнялось равенство $\vec{n} = k\vec{m}$, если известно, что: а) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}| = 0{,}5$ см, $|\vec{n}| = 2$ см; б) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены и $|\vec{m}| = 12$ см, $|\vec{n}| = 24$ дм; в) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ противоположно направлены и $|\vec{m}| = 400$ мм, $|\vec{n}| = 4$ дм; г) векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены и $|\vec{m}| = \sqrt{2}$ см, $|\vec{n}| = \sqrt{50}$ см.

999 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O, M — середина отрезка AO. Найдите, если это возможно, такое число k, чтобы выполнялось равенство:

а) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{BO} = k\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{CA}$;
г) $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{DC}$; д) $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{CA}$;
ж) $\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{AM}$; з) $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{CM}$; и) $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{BD}$.

1000 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Коллинеарны ли векторы: а) $\vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{a}$; б) $\vec{b} - 2\vec{a}$ и $\vec{a}$? Ответ обоснуйте.

1001 Докажите, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то:

а) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ не коллинеарны;
б) векторы $2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{a} + \vec{b}$ не коллинеарны;
в) векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} + 3\vec{b}$ не коллинеарны.

1002 Точка M лежит на диагонали AC параллелограмма $ABCD$, причём $AM : MC = 4 : 1$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

1003 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите числа x и y, удовлетворяющие равенству: а) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$; б) $4\vec{a} - x\vec{a} + 5\vec{b} + y\vec{b} = 0$; в) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = 0$; г) $\vec{a} + \vec{b} - 3y\vec{a} + x\vec{b} = \vec{0}$.

1004 Начертите прямоугольную систему координат Oxy и координатные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Постройте векторы с началом в точке O, заданные координатами $\vec{a}\{3; 0\}$, $\vec{b}\{2; -1\}$, $\vec{c}\{0; -3\}$, $\vec{d}\{1; 1\}$, $\vec{e}\{2; \sqrt{2}\}$.

1005 Разложите векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ и $\vec{f}$, изображённые на рисунке 309, *а*, *б*, *в*, по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ и найдите их координаты.

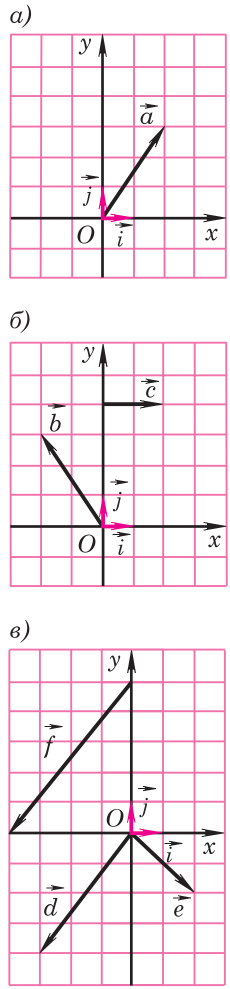


Рис. 309

1006 Выпишите координаты векторов $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{i}+2\vec{j}$, $\vec{c}=8\vec{i}$, $\vec{d}=\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{e}=-2\vec{j}$, $\vec{f}=-\vec{i}$.

1007 Запишите разложение по координатным векторам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ вектора: а) $\vec{x}\{-3; \frac{1}{5}\}$; б) $\vec{y}\{-2; -3\}$; в) $\vec{z}\{-1; 0\}$; г) $\vec{u}\{0; 3\}$; д) $\vec{v}\{0; 1\}$.

1008 Найдите числа x и y, удовлетворяющие условию: а) $x\vec{i}+y\vec{j}=5\vec{i}-2\vec{j}$; б) $-3\vec{i}+y\vec{j}=x\vec{i}+7\vec{j}$; в) $x\vec{i}+y\vec{j}=-4\vec{i}$; г) $x\vec{i}+y\vec{j}=\vec{0}$.

1009 Найдите координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$, если: а) $\vec{a}\{3; 2\}$, $\vec{b}\{2; 5\}$; б) $\vec{a}\{3; -4\}$, $\vec{b}\{1; 5\}$; в) $\vec{a}\{-4; -2\}$, $\vec{b}\{5; 3\}$; г) $\vec{a}\{2; 7\}$, $\vec{b}\{-3; -7\}$.

1010 Найдите координаты вектора $\vec{a}-\vec{b}$, если: а) $\vec{a}\{5; 3\}$, $\vec{b}\{2; 1\}$; б) $\vec{a}\{3; 2\}$, $\vec{b}\{-3; 2\}$; в) $\vec{a}\{3; 6\}$, $\vec{b}\{4; -3\}$; г) $\vec{a}\{-5; -6\}$, $\vec{b}\{2; -4\}$.

1011 Найдите координаты векторов $2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-3\vec{a}$, если $\vec{a}\{3; 2\}$.

1012 Даны векторы $\vec{a}\{2; 4\}$, $\vec{b}\{-2; 0\}$, $\vec{c}\{0; 0\}$, $\vec{d}\{-2; -3\}$, $\vec{e}(2; -3\}$, $\vec{f}\{0, 5\}$. Найдите координаты векторов, противоположных данным.

1013 Найдите координаты вектора $\vec{v}$, если: а) $\vec{v}=3\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}\{2; -5\}$, $\vec{b}\{-5; 2\}$; б) $\vec{v}=2\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$, $\vec{a}\{4; 1\}$, $\vec{b}\{1; 2\}$, $\vec{c}\{2; 7\}$;
в) $\vec{v}=3\vec{a}-2\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{a}\{-7; -1\}$, $\vec{b}\{-1; 7\}$, $\vec{c}\{4; -6\}$;
г) $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}\{7; -2\}$, $\vec{b}\{2; 5\}$, $\vec{c}\{-3; 3\}$.

1014 Докажите, что если два вектора коллинеарны, то координаты одного вектора пропорциональны координатам другого. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

1015 Даны векторы $\vec{a}\{3; 7\}$, $\vec{b}\{-2; 1\}$, $\vec{c}\{6; 14\}$, $\vec{d}\{2; -1\}$, $\vec{e}\{2; 4\}$. Укажите среди этих векторов попарно коллинеарные векторы.

§2 Простейшие задачи в координатах

95. Связь между координатами вектора и координатами его начала и конца

Рассмотрим прямоугольную систему координат и какую-нибудь точку M с координатами $(x; y)$. Напомним, как определяются числа x и y. Проведём через точку M прямые, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через M_1

и M_2 точки пересечения этих прямых с осями Ox и Oy (рис. 310). Число x (абсцисса точки M) определяется так: $x = OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси (рис. 310, *а*), $x = -OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси (рис. 310, *б*); $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O.

Аналогично определяется число y (ордината точки M). На рисунке 311 изображена прямоугольная система координат Oxy и отмечены точки $A\,(3;\,2)$, $B\,(-4;\,3)$, $C\,(-2{,}5;\,0)$.

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовём **радиус-вектором** точки M. Докажем, что **координаты точки M равны соответствующим координатам её радиус-вектора**.

Воспользуемся равенством $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (см. рис. 310) и докажем, что $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ и $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$. Если $x > 0$ (как на рисунке 310, *а*), то $x = OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ сонаправлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Если $x < 0$ (как на рисунке 310, *б*), то $x = -OM_1$, а векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\vec{i}$ противоположно направлены. Поэтому $\overrightarrow{OM_1} = -OM_1 \cdot \vec{i} = x\vec{i}$. Наконец, если $x = 0$, то $\overrightarrow{OM_1} = \vec{0}$ и равенство $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$ в этом случае также справедливо. Таким образом, в любом случае $\overrightarrow{OM_1} = x\vec{i}$. Аналогично доказывается, что $\overrightarrow{OM_2} = y\vec{j}$.

Значит, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Отсюда следует, что координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ равны $\{x;\,y\}$, т. е. равны соответствующим координатам точки M, что и требовалось доказать.

Пользуясь доказанным утверждением, выразим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ через координаты его начала A и конца B. Пусть точка A имеет координаты $(x_1;\,y_1)$, а точка B — координаты $(x_2;\,y_2)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен разности векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ (рис. 312), поэтому его координаты равны разностям соответствующих координат векторов $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$. Но $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ — радиус-векторы точек

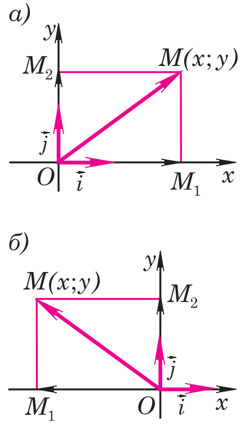


Рис. 310

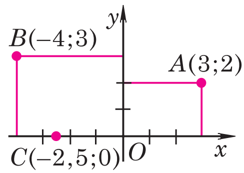


Рис. 311

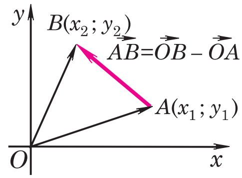


Рис. 312

B и A, и, значит, $\overrightarrow{OB}$ имеет координаты $\{x_2; y_2\}$, а $\overrightarrow{OA}$ имеет координаты $\{x_1; y_1\}$.

Следовательно, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Таким образом, **каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.**

На рисунке 308 (с. 249) точки B и C имеют координаты (1; 4) и (4; 2), поэтому координаты вектора $\overrightarrow{BC}$ равны $\{3; -2\}$.

96. Простейшие задачи в координатах

Введение системы координат даёт возможность изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств и таким образом использовать в геометрии методы алгебры. Такой подход к изучению свойств геометрических фигур называется **методом координат**.

Решим три вспомогательные задачи а) — в).

а) **Координаты середины отрезка.** Пусть в системе координат Oxy точка A имеет координаты $(x_1; y_1)$, а точка B — координаты $(x_2; y_2)$. Выразим координаты $(x; y)$ середины C отрезка AB через координаты его концов.

Так как точка C — середина отрезка AB, то

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \qquad (1)$$

(Это равенство было доказано в п. 92.)

Координаты векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ равны соответствующим координатам точек C, A и B: $\overrightarrow{OC}\{x; y\}$, $\overrightarrow{OA}\{x_1; y_1\}$, $\overrightarrow{OB}\{x_2; y_2\}$. Записывая равенство (1) в координатах, получим:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Таким образом, **каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.**

б) **Вычисление длины вектора по его координатам.** Докажем, что **длина вектора $\vec{a}\{x; y\}$ вычисляется по формуле**

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и проведём через точку A перпендикуляры AA_1 и AA_2 к осям Ox и Oy (рис. 313). Координаты точки A равны координатам вектора $\overrightarrow{OA}$, т. е. $(x; y)$. Поэтому $OA_1 = |x|$, $AA_1 = OA_2 = |y|$ (мы рассматриваем случаи, когда $x \neq 0$ и $y \neq 0$; другие случаи рассмотрите самостоятельно). По теореме Пифагора

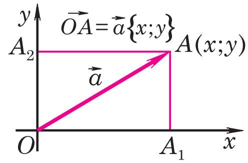


Рис. 313

$$OA = \sqrt{OA_1^2 + AA_1^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Но $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = OA$, поэтому $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, что и требовалось доказать.

в) **Расстояние между двумя точками.** Пусть точка M_1 имеет координаты $(x_1; y_1)$, а точка M_2 — координаты $(x_2; y_2)$. Выразим расстояние d между точками M_1 и M_2 через их координаты.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Его координаты равны $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$. Следовательно, длина этого вектора может быть найдена по формуле

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Но $|\overrightarrow{M_1M_2}| = d$. Таким образом, расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ выражается формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Задачи

1016 Точка A лежит на положительной полуоси Ox, а точка B — на положительной полуоси Oy. Найдите координаты вершин: а) треугольника ABO, если $OA = 5$, $OB = 3$; б) прямоугольника $OACB$, если $OA = a$, $OB = b$.

1017 Корабль проплывает от пункта А сначала 100 км на восток, а потом 75 км на север. В системе координат, указанной на рисунке 314, изобразите результирующее перемещение как вектор $\vec{a}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$.

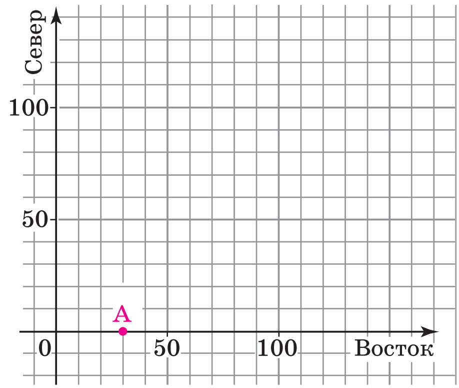


Рис. 314

1018 Начертите квадрат $MNPQ$ так, чтобы вершина P имела координаты $(-3; 3)$, а диагонали квадрата пересекались в начале координат. Найдите координаты точек M, N и Q.

1019 Найдите координаты вершин равнобедренного треугольника ABC, изображённого на рисунке 315, если $AB = 2a$, а высота CO равна h.

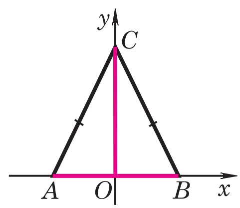


Рис. 315

1020 Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если $A\,(0; 0)$, $B\,(5; 0)$, $C\,(12; -3)$.

1021 Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, зная координаты его начала и конца:
а) $A\,(2; 7)$, $B\,(-2; 7)$; б) $A\,(-5; 1)$, $B\,(-5; 27)$;
в) $A\,(-3; 0)$, $B\,(0; 4)$; г) $A\,(0; 3)$, $B\,(-4; 0)$.

1022 Перечертите таблицу в тетрадь, заполните пустые клетки и найдите x и y:

A	$(0; 0)$	$(x; -3)$		$(a; b)$	$(1; 2)$
B	$(1; 1)$	$(2; -7)$	$(3; 1)$		
$\overrightarrow{AB}$		$\{5; y\}$	$\{-3; -\frac{1}{2}\}$	$\{c; d\}$	$\{0; 0\}$

1023 Перечертите таблицу в тетрадь и, используя формулы для вычисления координат середины M отрезка AB, заполните пустые клетки:

A	$(2; -3)$		$(0; 1)$	$(0; 0)$	$(c; d)$	$(3; 5)$	$(3t + 5; 7)$	$(1; 3)$
B	$(-3; 1)$	$(4; 7)$		$(-3; 7)$		$(3; 8)$	$(t + 7; -7)$	
M		$(-3; -2)$	$(3; -5)$		$(a; b)$			$(0; 0)$

1024 Даны точки $A(0; 1)$ и $B(5; -3)$. Найдите координаты точек C и D, если известно, что точка B — середина отрезка AC, а точка D — середина отрезка BC.

1025 Найдите длины векторов: а) $\vec{a}\{5; 9\}$; б) $\vec{b}\{-3; 4\}$; в) $\vec{c}\{-10; -10\}$; г) $\vec{d}\{10; 17\}$; д) $\vec{e}\{11; -11\}$; е) $\vec{f}\{10; 0\}$.

1026 Найдите расстояние от точки $M(3; -2)$: а) до оси абсцисс; б) до оси ординат; в) до начала координат.

1027 Найдите расстояние между точками A и B, если:
а) $A(2; 7)$, $B(-2; 7)$; б) $A(-5; 1)$, $B(-5; -7)$;
в) $A(-3; 0)$, $B(0; 4)$; г) $A(0; 3)$, $B(-4; 0)$.

1028 Найдите периметр треугольника MNP, если $M(4; 0)$, $N(12; -2)$, $P(5; -9)$.

1029 Найдите медиану AM треугольника ABC, вершины которого имеют координаты: $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$.

1030 Точки B и C лежат соответственно на положительных полуосях Ox и Oy, а точка A лежит на отрицательной полуоси Ox, причём $OA = a$, $OB = b$, $OC = h$. Найдите стороны AC и BC треугольника ABC.

1031 Найдите сторону AC и диагональ OC трапеции $OBCA$ с основаниями $OA = a$ и $BC = d$, если точка A лежит на положительной полуоси Ox, а вершина B имеет координаты $(b; c)$.

1032 Найдите x, если:
а) расстояние между точками $A(2; 3)$ и $B(x; 1)$ равно 2;
б) расстояние между точками $M_1(-1; x)$ и $M_2(2x; 3)$ равно 7.

1033 Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, и найдите его площадь, если вершины треугольника имеют координаты:
а) $A(0; 1)$, $B(1; -4)$, $C(5; 2)$;
б) $A(-4; 1)$, $B(-2; 4)$, $C(0; 1)$.

1034 Докажите, что четырёхугольник $MNPQ$ является параллелограммом, и найдите его диагонали, если:
а) $M(1; 1)$, $N(6; 1)$, $P(7; 4)$, $Q(2; 4)$;
б) $M(-5; 1)$, $N(-4; 4)$, $P(-1; 5)$, $Q(-2; 2)$.

1035 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является прямоугольником, и найдите его площадь, если:
а) $A(-3; -1)$, $B(1; -1)$, $C(1; -3)$, $D(-3; -3)$;
б) $A(4; 1)$, $B(3; 5)$, $C(-1; 4)$, $D(0; 0)$.

1036. Курьер должен принести заказ из пекарни в магазин, кафе и столовую. Ему предоставили карту маршрута, масштаб которой 1:10 000 (рис. 316). Все пункты, в которых может находиться курьер, соединяют прямолинейные дороги. Пекарня находится ровно посередине отрезка, соединяющего кафе и столовую. Какое расстояние должен пройти курьер, чтобы быстрее доставить заказ и вернуться обратно в пекарню?

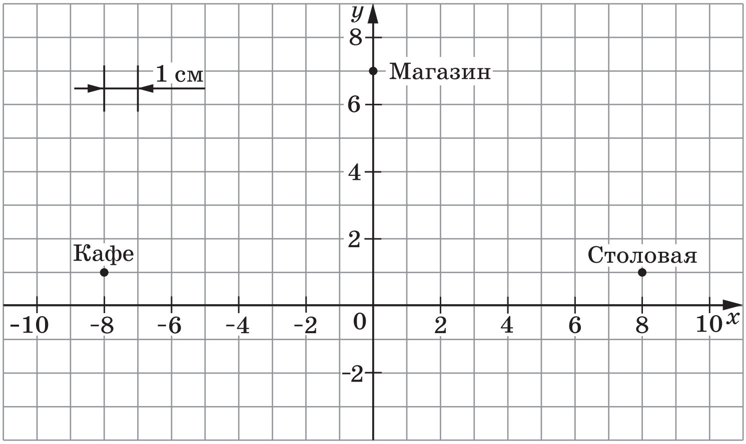


Рис. 316

1037. Курьер должен доставить заказ со склада в магазин, кафе, столовую и кондитерскую. Ему предоставили карту маршрута, масштаб которой 1:10 000 (рис. 317). Все пункты, в которых может находиться курьер, соединяют прямолинейные дороги.

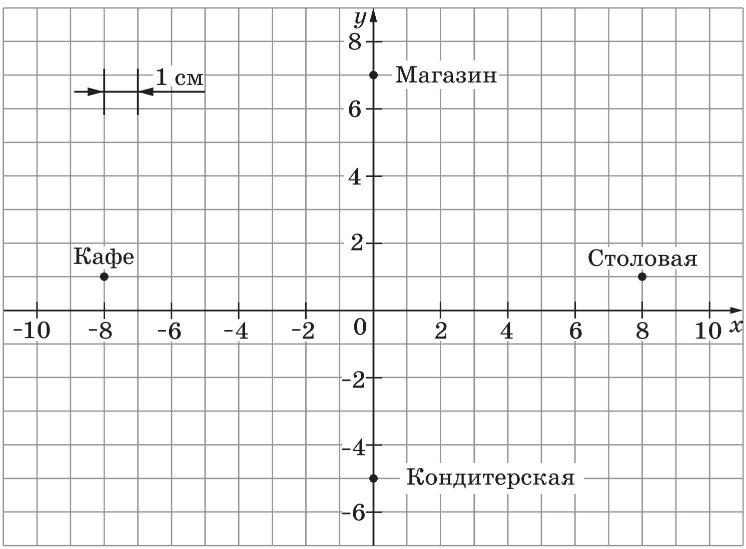


Рис. 317

Склад находится ровно посередине отрезка, соединяющего магазин и кондитерскую. Какое расстояние должен пройти курьер, чтобы быстрее доставить заказ и вернуться обратно на склад?

Применение метода координат к решению задач

Формулы координат середины отрезка и расстояния между двумя точками можно использовать для решения более сложных геометрических задач. С этой целью следует ввести прямоугольную систему координат и записать условие задачи в координатах. После этого решение задачи проводится с помощью алгебраических вычислений.

1038 Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его вершин.

Решение

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Обозначим буквой M середину гипотенузы AB. Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 318. Если $BC = a$, $AC = b$, то вершины треугольника имеют координаты $C\,(0;\,0)$, $B\,(a;\,0)$, $A\,(0;\,b)$. По формулам координат середины отрезка находим координаты точки M:

$$M\left(\frac{a}{2};\,\frac{b}{2}\right).$$

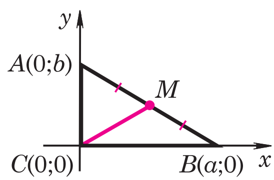


Рис. 318

Пользуясь формулой расстояния между двумя точками, найдём длины отрезков MC и MA:

$$MC = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$MA = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, $MA = MB = MC$, что и требовалось доказать.

1039 Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей.

Решение

Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 319. Если $AD = BC = a$, а точка B имеет координаты $(b;\,c)$, то точка D имеет координаты $(a;\,0)$, а точка C — координаты $(a + b;\,c)$. Используя формулу расстояния между двумя точками, находим:

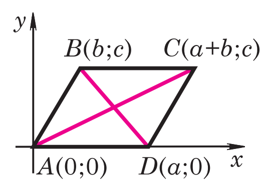


Рис. 319

$$AB^2 = b^2 + c^2,\ AD^2 = a^2,\ AC^2 = (a+b)^2 + c^2,\ BD^2 = (a-b)^2 + c^2.$$

Отсюда получаем:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\,(AB^2 + AD^2) = 2\,(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$AC^2 + BD^2 = (a+b)^2 + c^2 + (a-b)^2 + c^2 = 2\,(a^2 + b^2 + c^2).$$

Таким образом,

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2,$$

что и требовалось доказать.

1040 Медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, равна 160 см, а основание треугольника равно 80 см. Найдите две другие медианы этого треугольника.

1041 Высота треугольника, равная 10 см, делит основание на два отрезка, равные 10 см и 4 см. Найдите медиану, проведённую к меньшей из двух других сторон.

1042 Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

1043 Докажите, что если диагонали параллелограмма равны, то параллелограмм является прямоугольником.

1044 Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для произвольной точки M плоскости справедливо равенство

$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2.$$

§3 Уравнения окружности и прямой

97. Уравнение линии на плоскости

При изучении алгебры мы строили графики некоторых функций в прямоугольной системе координат, например график функции $y = x$. Известно, что графиком этой функции является прямая, проходящая через точки $O\,(0;0)$ и $A\,(1;1)$ (рис. 320). Координаты любой точки $M\,(x;y)$, лежащей на прямой OA, удовлетворяют уравнению $y = x$ (так как $MM_1 = MM_2$), а координаты любой точки, не лежащей на прямой OA, этому уравнению не удовлетворяют. Говорят, что уравнение $y = x$ является уравнением прямой OA. Введём теперь понятие уравнения произвольной линии.

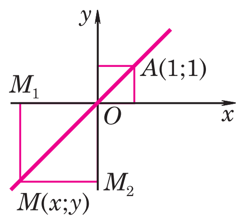


Рис. 320

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy и дана некоторая линия L (рис. 321). Уравнение с двумя переменными x и y называется уравнением линии L, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии L и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

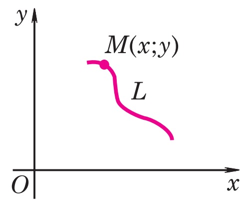


Рис. 321

При изучении линий методом координат возникают две задачи: 1) по геометрическим свойствам данной линии найти её уравнение; 2) обратная задача: по заданному уравнению линии исследовать её геометрические свойства. В следующем пункте мы рассмотрим первую из этих задач применительно к окружности. Вторая задача рассматривалась в курсе алгебры при построении графиков функций.

98. Уравнение окружности

Выведем уравнение окружности радиуса r с центром C в заданной прямоугольной системе координат. Пусть точка C имеет координаты $(x_0; y_0)$ (рис. 322). Расстояние от произвольной точки $M\,(x; y)$ до точки C вычисляется по формуле $MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Если точка M лежит на данной окружности, то $MC = r$, $MC^2 = r^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

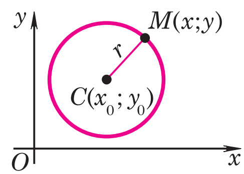


Рис. 322

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Если же точка $M\,(x; y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2 \neq r^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1).

Следовательно, **в прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C\,(x_0; y_0)$ имеет вид**

$$\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.}$$

В частности, уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Задача

Найти уравнение окружности с центром в точке (–3; 4), проходящей через начало координат.

Решение

Центр окружности имеет координаты (–3; 4). Поэтому уравнение этой окружности можно записать в виде $(x+3)^2+(y-4)^2=r^2$, где r — пока неизвестный радиус окружности. Найдём его. Для этого воспользуемся тем, что окружность проходит через начало координат, т. е. координаты точки $O\,(0; 0)$ удовлетворяют этому уравнению: $(0+3)^2+(0-4)^2=r^2$. Отсюда $r^2=25$, и, значит, $r=5$. Итак, искомое уравнение окружности имеет вид $(x+3)^2+(y-4)^2=25$.

Если раскрыть скобки и привести подобные члены, то получится уравнение x^2+y^2+ $+6x-8y=0$, которое также является уравнением данной окружности.

99. Уравнение прямой

Выведем уравнение данной прямой l в заданной прямоугольной системе координат. Отметим две точки $A\,(x_1; y_1)$ и $B\,(x_2; y_2)$ так, чтобы прямая l была серединным перпендикуляром к отрезку AB (рис. 323, *а*). Если точка $M\,(x; y)$ лежит на прямой l, то $AM=BM$, или $AM^2=BM^2$, т. е. координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2. \qquad (2)$$

Если же точка $M\,(x; y)$ не лежит на прямой l, то $AM^2 \neq BM^2$, и, значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению (2). Следовательно, уравнение (2) является уравнением прямой l в заданной системе координат. После возведения выражений в скобках в квадрат и приведения подобных членов уравнение (2) принимает вид

$$ax+by+c=0, \qquad (3)$$

где $a=2\,(x_1-x_2)$, $b=2\,(y_1-y_2)$, $c=x_2^2+y_2^2-x_1^2-y_1^2$.

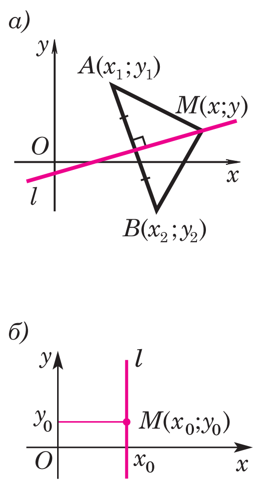


Рис. 323

Так как $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — различные точки, то хотя бы одна из разностей $(x_1 - x_2)$ и $(y_1 - y_2)$ не равна нулю, т. е. хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля. Таким образом, **уравнение прямой в прямоугольной системе координат является уравнением первой степени.**

Если в уравнении (3) коэффициент b отличен от нуля, то это уравнение можно записать так:

$$y = kx + d,$$

где $k = -\frac{a}{b}$, $d = -\frac{c}{b}$. Число k называется **угловым коэффициентом прямой**, заданной этим уравнением. Докажите самостоятельно, что:

две параллельные прямые, не параллельные оси Oy, имеют одинаковые угловые коэффициенты; если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны.

Выведем уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельной оси Oy (рис. 323, *б*). Абсцисса любой точки $M(x; y)$ прямой l равна x_0, т. е. координаты любой точки $M(x; y)$ прямой l удовлетворяют уравнению $x = x_0$. В то же время координаты любой точки, не лежащей на прямой l, этому уравнению не удовлетворяют. Следовательно, уравнение $x = x_0$ является уравнением прямой l.

Ясно, что ось Ox имеет уравнение $y = 0$, а ось Oy — уравнение $x = 0$.

Задачи

1045 Начертите окружность, заданную уравнением:
а) $x^2 + y^2 = 9$; б) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$; в) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$; г) $(x-1)^2 + y^2 = 4$; д) $x^2 + (y+2)^2 = 2$.

1046 Какие из точек $A(3; -4)$, $B(1; 0)$, $C(0; 5)$, $D(0; 0)$ и $E(0; 1)$ лежат на окружности, заданной уравнением:

а) $x^2 + y^2 = 25$; б) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$; в) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$?

1047 Окружность задана уравнением $(x+5)^2+(y-1)^2=16$. Не пользуясь чертежом, укажите, какие из точек $A\,(-2; 4)$, $B\,(-5; -3)$, $C\,(-7; -2)$ и $D\,(1; 5)$ лежат:

а) внутри круга, ограниченного данной окружностью;
б) на окружности;
в) вне круга, ограниченного данной окружностью.

1048 Даны окружность $x^2+y^2=25$ и две точки $A\,(3; 4)$ и $B\,(4; -3)$. Докажите, что AB — хорда данной окружности.

1049 На окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=25$, найдите точки: а) с абсциссой -4; б) с ординатой 3.

1050 На окружности, заданной уравнением $(x-3)^2+(y-5)^2=25$, найдите точки: а) с абсциссой 3; б) с ординатой 5.

1051 Напишите уравнения окружностей с центром в начале координат и радиусами $r_1=3$, $r_2=\sqrt{2}$, $r_3=\frac{5}{2}$.

1052 Напишите уравнение окружности радиуса r с центром A, если: а) $A\,(0; 5)$, $r=3$; б) $A\,(-1; 2)$, $r=2$; в) $A\,(-3; -7)$, $r=\frac{1}{2}$; г) $A\,(4; -3)$, $r=10$.

1053 Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку $B\,(-1; 3)$.

1054 Напишите уравнение окружности с центром в точке $A\,(0; 6)$, проходящей через точку $B\,(-3; 2)$.

1055 Напишите уравнение окружности с диаметром MN, если: а) $M\,(-3; 5)$, $N\,(7; -3)$; б) $M\,(2; -1)$, $N\,(4; 3)$.

1056 Напишите уравнение окружности, проходящей через точку $A\,(1; 3)$, если известно, что центр окружности лежит на оси абсцисс, а радиус равен 5. Сколько существует таких окружностей?

1057 Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A\,(-3; 0)$ и $B\,(0; 9)$, если известно, что центр окружности лежит на оси ординат.

1058 Напишите уравнение прямой, проходящей через две данные точки: а) $A\,(1; -1)$ и $B\,(-3; 2)$; б) $C\,(2; 5)$ и $D\,(5; 2)$; в) $M\,(0; 1)$ и $N\,(-4; -5)$.

Решение

а) Уравнение прямой AB имеет вид $ax+by+c=0$. Так как точки A и B лежат на прямой AB, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$a\cdot 1+b\cdot(-1)+c=0,\; a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0,$$

$$\text{или } a-b+c=0,\; -3a+2b+c=0.$$

Из этих уравнений выразим коэффициенты a и b через c: $a = 3c$, $b = 4c$. Подставив эти значения в уравнение прямой, получим $3cx + 4cy + c = 0$. При любом $c \neq 0$ это уравнение является уравнением прямой AB. Сократив на c, запишем искомое уравнение в виде $3x + 4y + 1 = 0$.

1059 Даны координаты вершин треугольника ABC: $A\,(4; 6)$, $B\,(-4; 0)$, $C\,(-1; -4)$. Напишите уравнение прямой, содержащей медиану CM.

1060 Даны координаты вершин трапеции $ABCD$: $A\,(-2; -2)$, $B\,(-3; 1)$, $C\,(7; 7)$ и $D\,(3; 1)$. Напишите уравнения прямых, содержащих:
а) диагонали AC и BD трапеции;
б) среднюю линию трапеции.

1061 Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $M\,(2; 5)$ и параллельных осям координат.

1062 Начертите прямую, заданную уравнением: а) $y = 3$; б) $x = -2$; в) $y = -4$; г) $x = 7$.

1063 Найдите ординату точки M, лежащей на прямой AB, если известно, что $A\,(-8; -6)$, $B\,(-3; -1)$ и абсцисса точки M равна 5.

1064 Напишите уравнения прямых, содержащих стороны ромба, диагонали которого равны 10 см и 4 см, если известно, что его диагонали лежат на осях координат.

1065 Прямая и окружность заданы уравнениями $y = x - 2$ и $x^2 + (y - 2)^2 = 9$. Установите их взаимное расположение.

1066 Найдите количество точек пересечения прямой и окружности, заданных уравнениями $y = x + 5$ и $x^2 + (y - 2)^2 = 9$.

1067 Установите взаимное расположение окружностей, заданных уравнениями:
а) $x^2 + y^2 = 9$ и $x^2 + y^2 = 4$;
б) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$.

1068 Найдите количество точек пересечения окружностей, заданных уравнениями:
а) $(x + 2)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$;
б) $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$.

Использование уравнений окружности и прямой при решении задач

1069 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек, для каждой из которых расстояние от точки A в 2 раза больше расстояния от точки B.

Решение

Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 324, *а*. Тогда точки A и B имеют координаты $A\,(0;\,0)$, $B\,(a;\,0)$, где $a = AB$.

Найдём расстояния от произвольной точки $M\,(x;\,y)$ до точек A и B:

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Если точка $M\,(x;\,y)$ принадлежит искомому множеству, то

$$AM = 2BM, \text{ или } AM^2 = 4BM^2.$$

Поэтому её координаты удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = 4\,((x-a)^2 + y^2). \qquad (8)$$

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют этому уравнению.

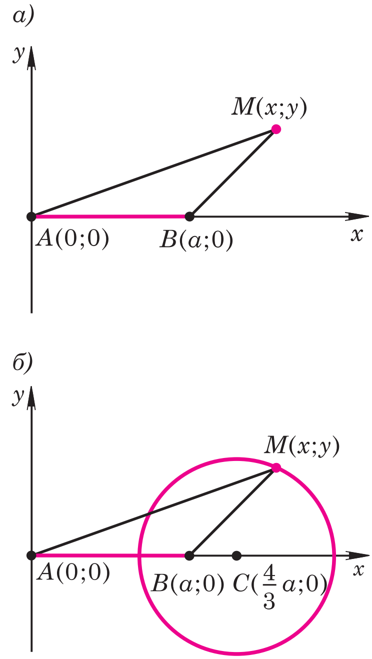


Рис. 324

Следовательно, уравнение (8) и есть уравнение искомого множества точек в выбранной системе координат. Раскрывая скобки и группируя слагаемые соответствующим образом, приводим уравнение (8) к виду

$$\left(x - \frac{4}{3}a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2.$$

Таким образом, искомым множеством точек является окружность радиуса $\frac{2}{3}a$ с центром в точке $C\left(\frac{4}{3}a;\,0\right)$. Эта окружность изображена на рисунке 324, *б*.

Замечание

Аналогично можно доказать, что множеством всех точек M, удовлетворяющих условию $AM = kBM$, где k — данное положительное число, не равное единице, является окружность радиуса $\frac{ka}{|k^2-1|}$ с центром в точке $\left(\frac{k^2a}{k^2-1};\ 0\right)$.

Эти окружности, соответствующие различным значениям $k \neq 1$, называют **окружностями Аполлония**, поскольку они рассматривались ещё древнегреческим математиком Аполлонием в его трактате «О кругах» во II в. до н. э.

Если $k=1$, то задача сводится к известной нам задаче о нахождении множества всех точек, равноудалённых от точек A и B. Таким множеством, как мы знаем, является серединный перпендикуляр к отрезку AB.

1070 Точка B — середина отрезка AC, длина которого равна 2. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых: а) $AM^2+BM^2+CM^2=50$; б) $AM^2+2BM^2+3CM^2=4$.

1071 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2+BM^2=k^2$, где k — данное число.

1072 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $AM^2-BM^2=k$, где k — данное число.

Решение

Введём прямоугольную систему координат так, чтобы точка A была началом координат, а точка B имела координаты $(a; 0)$, где $a=AB$. Найдём расстояния от произвольной точки $M\,(x; y)$ до точек A и B: $AM=\sqrt{x^2+y^2}$, $BM=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

Если точка $M\,(x; y)$ принадлежит искомому множеству, то $AM^2-BM^2=k$, поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению $x^2+y^2-(x-a)^2-y^2=k$, или $2ax-a^2-k=0$.

Если же точка M не принадлежит искомому множеству, то её координаты не удовлетворяют этому уравнению. Итак, полученное уравнение является уравнением искомого множества точек. Но этим уравнением определяется прямая, параллельная оси Oy, если $a^2+k\neq 0$, и сама ось Oy, если $a^2+k=0$. Таким образом, искомым множеством точек является прямая, перпендикулярная к прямой AB.

1073 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых $BM^2-AM^2=2AB^2$.

1074 Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых

$$(AM^2+DM^2)-(BM^2+CM^2)=2AB^2.$$

1075* Дан ромб $ABCD$, диагонали которого равны $2a$ и $2b$. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых

$$AM^2+DM^2=BM^2+CM^2.$$

Вопросы для повторения к главе XI

1 Сформулируйте и докажите лемму о коллинеарных векторах.

2 Что значит разложить вектор по двум данным векторам?

3 Сформулируйте и докажите теорему о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам.

4 Объясните, как вводится прямоугольная система координат.

5 Что такое координатные векторы?

6 Сформулируйте и докажите утверждение о разложении произвольного вектора по координатным векторам.

7 Что такое координаты вектора? Чему равны координаты координатных векторов? Как связаны между собой координаты равных векторов?

8 Сформулируйте и докажите правила нахождения координат суммы и разности векторов, а также произведения вектора на число по заданным координатам векторов.

9 Что такое радиус-вектор точки? Докажите, что координаты точки равны соответствующим координатам её радиус-вектора.

10 Выведите формулы для вычисления координат вектора по координатам его начала и конца.

11 Выведите формулы для вычисления координат середины отрезка по координатам его концов.

12 Выведите формулу для вычисления длины вектора по его координатам.

13 Выведите формулу для вычисления расстояния между двумя точками по их координатам.

14 Приведите пример решения геометрической задачи с применением метода координат.

15 Какое уравнение называется уравнением данной линии? Приведите пример.

16 Выведите уравнение окружности данного радиуса с центром в данной точке.

17 Напишите уравнение окружности данного радиуса с центром в начале координат.

18 Выведите уравнение данной прямой в прямоугольной системе координат.

19 Что такое угловой коэффициент прямой?

20 Докажите, что: две параллельные прямые, не параллельные оси Oy, имеют одинаковые угловые коэффициенты; если две прямые имеют одинаковые угловые коэффициенты, то эти прямые параллельны.

21 Напишите уравнения прямых, проходящих через данную точку $M_0\,(x_0;\, y_0)$ и параллельных осям координат.

22 Напишите уравнения осей координат.

23 Исследуйте взаимное расположение двух окружностей в зависимости от их радиусов и расстояния между их центрами. Сформулируйте полученные выводы.

24 Приведите примеры использования уравнений окружности и прямой при решении геометрических задач.

Дополнительные задачи

1076 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Найдите такое число x (если это возможно), чтобы векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ были коллинеарны:
а) $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + x\vec{b}$;
б) $\vec{p} = x\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} + x\vec{b}$;
в) $\vec{p} = \vec{a} + x\vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$;
г) $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = x\vec{a} + \vec{b}$.

1077 Найдите координаты вектора $\vec{p}$ и его длину, если:
а) $\vec{p} = 7\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{a}\{1; -1\}$, $\vec{b}\{5; -2\}$;
б) $\vec{p} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{a}\{6; 3\}$, $\vec{b}\{5; 4\}$;
в) $\vec{p} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$, $\vec{a}\left\{\frac{3}{5}; \frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}\{6; -1\}$;
г) $\vec{p} = 3(-2\vec{a} - 4\vec{b})$, $\vec{a}\{1; 5\}$, $\vec{b}\{-1; -1\}$.

1078 Докажите, что расстояние между любыми двумя точками $M_1(x_1; 0)$ и $M_2(x_2; 0)$ оси абсцисс вычисляется по формуле $d = |x_1 - x_2|$.

1079 Докажите, что треугольник ABC, вершины которого имеют координаты $A(4; 8)$, $B(12; 11)$, $C(7; 0)$, является равнобедренным, но не равносторонним.

1080 Докажите, что углы A и C треугольника ABC равны, если $A(-5; 6)$, $B(3; -9)$ и $C(-12; -17)$.

1081 Докажите, что точка D равноудалена от точек A, B и C, если:
а) $D(1; 1)$, $A(5; 4)$, $B(4; -3)$, $C(-2; 5)$;
б) $D(1; 0)$, $A(7; -8)$, $B(-5; 8)$, $C(9; 6)$.

1082 На оси абсцисс найдите точку, равноудалённую от точек $M_1(-2; 4)$ и $M_2(6; 8)$.

1083 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(-5; 13)$, $B(3; 5)$, $C(-3; -1)$. Найдите: а) координаты середин сторон треугольника; б) медиану, проведённую к стороне AC; в) средние линии треугольника.

1084 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$, вершины которого имеют координаты $A(3; 2)$, $B(0; 5)$, $C(-3; 2)$, $D(0; -1)$, является квадратом.

1085 Докажите, что четырёхугольник $ABCD$, вершины которого имеют координаты $A(-2; -3)$, $B(1; 4)$, $C(8; 7)$, $D(5; 0)$, является ромбом. Найдите его площадь.

1086 Найдите координаты четвёртой вершины параллелограмма по заданным координатам трёх его вершин: $(-4; 4)$, $(-5; 1)$ и $(-1; 5)$. Сколько решений имеет задача?

1087 Выясните, какие из данных уравнений являются уравнениями окружности. Найдите координаты центра и радиус каждой окружности:
а) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$;
б) $x^2+(y+7)^2=1$;
в) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$;
г) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;
д) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$.

1088 Напишите уравнение окружности, проходящей через точки $A\,(3; 0)$ и $B\,(-1; 2)$, если центр её лежит на прямой $y=x+2$.

1089 Напишите уравнение окружности, проходящей через три данные точки:
а) $A\,(1; -4)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(3; -2)$; б) $A\,(3; -7)$, $B\,(8; -2)$, $C\,(6; 2)$.

1090 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A\,(-7; 5)$, $B\,(3; -1)$, $C\,(5; 3)$. Составьте уравнения: а) серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; б) прямых AB, BC и CA; в) прямых, на которых лежат средние линии треугольника.

1091 Докажите, что прямые, заданные уравнениями $3x-1{,}5y+1=0$ и $2x-y-3=0$, параллельны.

1092 Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой, если:
а) $A\,(-2; 0)$, $B\left(3; 2\frac{1}{2}\right)$, $C\,(6; 4)$; б) $A\,(3; 10)$, $B\,(3; 12)$, $C\,(3; -6)$;
в) $A\,(1; 2)$, $B\,(2; 5)$, $C\,(-10; -31)$.

Применение метода координат к решению задач

1093 Две стороны треугольника равны 17 см и 28 см, а высота, проведённая к большей из них, равна 15 см. Найдите медианы треугольника.

1094 Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований.

1095 Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для всех точек M величина $(AM^2+CM^2)-(BM^2+DM^2)$ имеет одно и то же значение.

1096 Докажите, что медиану AA_1 треугольника ABC можно вычислить по формуле $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2AC^2+2AB^2-BC^2}$. Используя эту формулу, докажите, что если две медианы треугольника равны, то треугольник равнобедренный.

1097 Даны две точки A и B. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых:
а) $2AM^2-BM^2=2AB^2$; б) $2AM^2+2BM^2=6AB^2$.

Глава XII

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов

В этой главе получит дальнейшее развитие тригонометрический аппарат геометрии — синус, косинус, тангенс и котангенс будут определены для углов от 0° до 180°. Это даст возможность вывести формулы, связывающие между собой стороны и углы произвольного треугольника. Утверждения об этих формулах называются теоремой синусов и теоремой косинусов. Они широко используются как в самой геометрии, так и в её приложениях, в частности при проведении измерительных работ на местности. Кроме того, в этой главе вводится ещё одно действие над векторами — скалярное умножение векторов. С одной стороны, оно расширяет наши возможности в применении координатно-векторного метода при решении геометрических задач, а с другой — используется в физике для описания физических величин.

§1 Синус, косинус, тангенс, котангенс угла

100. Синус, косинус, тангенс, котангенс

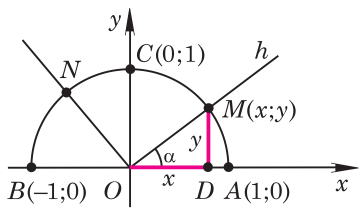


Рис. 325

Введём прямоугольную систему координат Oxy и построим полуокружность радиуса 1 с центром в начале координат, расположенную в первом и втором квадрантах (рис. 325). Назовём её **единичной полуокружностью**. Из точки O проведём луч h, пересекающий единичную полуокружность в точке $M\ (x;\ y)$. Обозначим буквой α угол между лучом h и положительной полуосью абсцисс (если луч h совпадает с положительной полуосью абсцисс, то будем считать, что $\alpha = 0°$).

Если угол α острый, то из прямоугольного треугольника DOM (см. рис. 325) имеем

$$\sin\alpha = \frac{MD}{OM},\ \cos\alpha = \frac{OD}{OM}.$$

Но $OM = 1$, $MD = y$, $OD = x$, поэтому

$$\sin\alpha = y,\ \cos\alpha = x. \qquad (1)$$

Итак, синус острого угла α равен ординате y точки M, а косинус угла α — абсциссе x точки M. Если угол α прямой, тупой или развёрнутый (углы AOC, AON и AOB на рисунке 325) или $\alpha = 0°$, то синус и косинус угла α также определим по формулам (1). Таким образом, **для любого угла α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ синусом угла α называется ордината y точки M, а косинусом угла α — абсцисса x точки M.** Так как координаты $(x; y)$ точек единичной полуокружности заключены в промежутках $0 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, то для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ справедливы неравенства

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,\ -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Найдём значения синуса и косинуса для углов 0°, 90° и 180°. Для этого рассмотрим лучи OA, OC и OB, соответствующие этим углам (см. рис. 325). Так как точки A, C и B имеют координаты $A\,(1; 0)$, $C\,(0; 1)$, $B\,(-1; 0)$, то

$$\begin{matrix} \sin 0° = 0,\ \sin 90° = 1,\ \sin 180° = 0, \\ \cos 0° = 1,\ \cos 90° = 0,\ \cos 180° = -1. \end{matrix} \qquad (2)$$

Тангенсом угла α ($\alpha \neq 90°$) называется отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (3)$$

При $\alpha = 90°$ $\operatorname{tg}\alpha$ не определён, поскольку $\cos 90° = 0$, и в формуле (3) знаменатель обращается в нуль. Используя формулы (2), находим: $\operatorname{tg} 0° = 0$, $\operatorname{tg} 180° = 0$.

Котангенсом угла α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) называется отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Котангенс угла α обозначается символом $\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

При $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$ $\text{ctg}\,\alpha$ не определён. Исходя из формул (2), получаем: $\text{ctg}\,90° = 0$.

101. Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения

На рисунке 325 изображены система координат Oxy и единичная полуокружность ACB с центром O. Эта полуокружность является дугой окружности, уравнение которой имеет вид $x^2 + y^2 = 1$. Подставив сюда выражения для x и y из формул (1), получим равенство

$$\mathbf{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,} \qquad (4)$$

которое выполняется для любого α из промежутка $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$. Равенство (4) называется **основным тригонометрическим тождеством.** В 7 классе оно было доказано для острых углов.

Справедливы также следующие тождества:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha, \ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$

при $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$,

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \ \cos(180° - \alpha) = -\cos a$$

при $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Они называются **формулами приведения** и доказываются в курсе алгебры.

102. Формулы для вычисления координат точки

Пусть задана система координат Oxy и дана произвольная точка $A\,(x;\,y)$ с неотрицательной ординатой y (рис. 326). Выразим координаты точки A через длину отрезка OA и угол α между лучом OA и положительной полуосью Ox. Для этого обозначим буквой M точку пересечения луча OA с единичной полуокружностью. По формулам (1) координаты точки M соответственно равны $\cos\alpha$, $\sin\alpha$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и точка M, т. е. $\overrightarrow{OM}\,\{\cos\alpha;\,\sin\alpha\}$. Век-

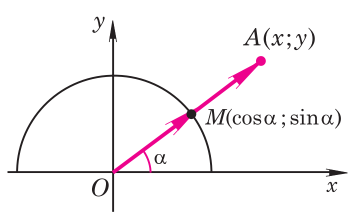


Рис. 326

тор $\overrightarrow{OA}$ имеет те же координаты, что и точка A, т. е. $\overrightarrow{OA}\{x; y\}$. Но $\overrightarrow{OA} = OA \cdot \overrightarrow{OM}$ (объясните почему), поэтому

$$x = OA \cdot \cos\alpha,\ y = OA \cdot \sin\alpha.$$

103. Угловой коэффициент прямой

В прямоугольной системе координат уравнение прямой имеет вид $y = kx + d$, число k называют угловым коэффициентом прямой.

Пусть прямая образует угол α с положительным направлением оси Ox (рис. 327). Выберем произвольную точку $C\ (x;\ y)$, лежащую на прямой $y = kx + d$. Найдём связь между угловым коэффициентом прямой k и углом α.

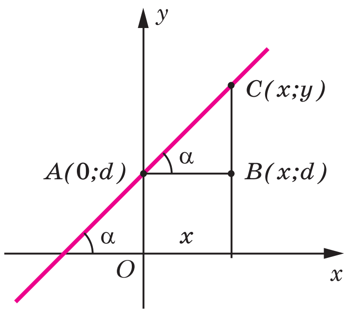


Рис. 327

Рассмотрим треугольник ABC, в нём точки имеют координаты $A\ (0;\ d)$, $C\ (x;\ y)$, $B\ (x;\ d)$, стороны $AB = x$, $BC = y - d$. Найдём тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{CB}{AB},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y-d}{x}.$$

Выразим y: $y - d = x \cdot \operatorname{tg}\alpha$, $y = x \cdot \operatorname{tg}\alpha + d$.

Мы получили, что угловой коэффициент прямой k равен **тангенсу угла наклона** прямой к положительному направлению оси Ox, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Задача.

Найдите угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox, если прямая задана уравнением $y = \sqrt{3}x - 2$.

Решение

Пусть данная прямая $y = \sqrt{3}x - 2$ образует с положительным направлением оси Ox угол α.

В прямоугольной системе координат уравнение прямой примет вид $y = kx + d$, где $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Имеем $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\alpha$, $\alpha = 60°$.

Задачи

1098 Ответьте на вопросы: а) Может ли абсцисса точки единичной полуокружности иметь значения 0,3; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$; –2,8?
б) Может ли ордината точки единичной полуокружности иметь значения 0,6; $\frac{1}{7}$; –0,3; 7; 1,002? Ответы обоснуйте.

1099 Проверьте, что точки $M_1(0; 1)$, $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $A(1; 0)$, $B(-1; 0)$ лежат на единичной полуокружности. Выпишите значения синуса, косинуса и тангенса углов AOM_1, AOM_2, AOM_3, AOM_4, AOB.

1100 Найдите $\sin\alpha$, если:
а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha = -1$.

1101 Найдите $\cos\alpha$, если:
а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha = 0$.

1102 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если:
а) $\cos\alpha = 1$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0° < \alpha < 90°$;
г) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $90° < \alpha < 180°$.

1103 Вычислите синусы, косинусы и тангенсы углов 120°, 135°, 150°.

1104 Постройте $\angle A$, если:
а) $\sin A = \frac{2}{3}$; б) $\cos A = \frac{3}{4}$; в) $\cos A = -\frac{2}{5}$.

1105 Угол между лучом OA, пересекающим единичную полуокружность, и положительной полуосью Ox равен α. Найдите координаты точки A, если:
а) $OA = 3$, $\alpha = 45°$;
б) $OA = 1{,}5$, $\alpha = 90°$;
в) $OA = 5$, $\alpha = 150°$;
г) $OA = 1$, $\alpha = 180°$;
д) $OA = 2$, $\alpha = 30°$.

1106 Найдите угол между лучом OA и положительной полуосью Ox, если точка A имеет координаты:
а) (2; 2); б) (0; 3); в) $(-\sqrt{3}; 1)$; г) $(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

1107 Найдите угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox, если прямая задана уравнением:

а) $y = x + 1$; б) $y = -x + 2$; в) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$; г) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$;

д) $y = -\sqrt{3}x - 2$.

1108 Луч света, падая из точки M (8; 3) под углом 45° к положительному направлению оси Ox, отражается от неё. Составьте уравнения прямых, которым принадлежат падающий и отражённый лучи. В какой точке отражённый луч пересекает экран, находящийся в точке $B(-10; 0)$ и расположенный перпендикулярно к оси Ox?

§2 Соотношения между сторонами и углами треугольника

104. Теорема о площади треугольника

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $BC = a$, $CA = b$ и S — площадь этого треугольника. Докажем, что

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

Введём систему координат с началом в точке C так, чтобы точка B лежала на положительной полуоси Cx, а точка A имела положительную ординату (рис. 328). Площадь данного треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2}ah$, где h — высота треугольника. Но h равна ординате точки A, т. е. $h = b \sin C$. Следовательно, $S = \frac{1}{2}ab \sin C$.

Теорема доказана.

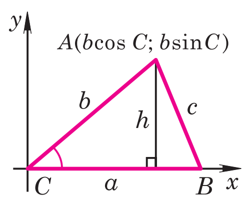


Рис. 328

105. Теорема синусов

Теорема

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC стороны обозначены $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}}.$$

По теореме о площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C,\ S = \frac{1}{2}bc \sin A,\ S = \frac{1}{2}ca \sin B.$$

Из первых двух равенств получаем: $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A$, откуда $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$. Точно так же из второго и третьего равенств следует, что $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

Итак, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Теорема доказана.

Замечание

Можно доказать (см. задачу **1122**), что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно, для любого треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$ имеют место равенства

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

106. Теорема косинусов

Теорема

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, например, что

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A}. \qquad (1)$$

Введём систему координат с началом в точке A так, как показано на рисунке 329. Тогда точка B будет иметь координаты $(c; 0)$, а точка C — координаты $(b\cos A; b\sin A)$. По формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$BC^2 = a^2 = (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A =$$
$$= b^2\cos^2 A + b^2\sin^2 A - 2bc\cos A + c^2 =$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

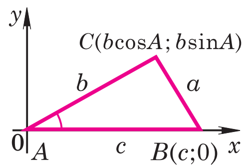


Рис. 329

Теорема доказана.

Теорему косинусов называют иногда **обобщённой теоремой Пифагора**. Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора. В самом деле, если в треугольнике ABC угол A прямой, то $\cos A = \cos 90° = 0$ и по формуле (1) получаем

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

т. е. квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

107. Решение треугольников

Решением треугольника называется нахождение всех его шести элементов (т. е. трёх сторон и трёх углов) по каким-нибудь трём данным элементам, определяющим треугольник.

Рассмотрим три задачи на решение треугольника. При этом будем пользоваться такими обозначениями для сторон треугольника ABC: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

Задача 1

Решение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Дано: a, b, $\angle C$. Найти: c, $\angle A$, $\angle B$.

Решение

1. По теореме косинусов находим c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}.$$

2. Пользуясь теоремой косинусов, имеем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Угол A находим с помощью микрокалькулятора или по таблице.

3. $\angle B = 180° - \angle A - \angle C.$

Задача 2

Решение треугольника по стороне и прилежащим к ней углам

Дано: a, $\angle B$, $\angle C$. Найти: $\angle A$, b, c.

Решение

1. $\angle A = 180° - \angle B - \angle C.$

2. С помощью теоремы синусов вычисляем b и c:

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A},\ c = a\frac{\sin C}{\sin A}.$$

Задача 3

Решение треугольника по трём сторонам

Дано: a, b и c. Найти: $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

Решение

1. По теореме косинусов получаем:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Угол A находим с помощью микрокалькулятора или по таблице.

2. Аналогично находим угол B.

3. $\angle C = 180° - \angle A - \angle B.$

Пример

Футбольный мяч находится в точке A футбольного поля на расстояниях 23 м и 24 м от оснований B и C стоек ворот (рис. 330). Футболист направляет мяч в ворота. Найдите угол α попадания мяча в ворота, если ширина ворот равна 7 м.

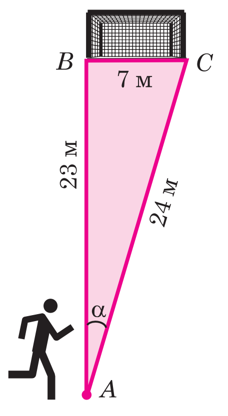


Рис. 330

Решение

Рассмотрим треугольник ABC, вершинами которого являются точка A расположения мяча и точки B и C в основаниях стоек ворот. По условию задачи $c = AB = 23$ м, $b = AC = 24$ м и

$a = BC = 7$ м. Эти данные позволяют решить треугольник ABC и найти угол α, равный углу A (см. задачу 3). С помощью теоремы косинусов определяем $\cos A$:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{24^2 + 23^2 - 7^2}{2 \cdot 24 \cdot 23}.$$

Угол α находим по таблице: $\alpha \approx 16°57'$.

108. Измерительные работы

Тригонометрические формулы используются при проведении различных измерительных работ на местности.

Измерение высоты предмета. Предположим, что требуется определить высоту AH какого-то предмета (рис. 331). Для этого отметим точку B на определённом расстоянии a от основания H предмета и измерим угол ABH: $\angle ABH = \alpha$. По этим данным из прямоугольного треугольника AHB находим высоту предмета: $AH = a \operatorname{tg} \alpha$.

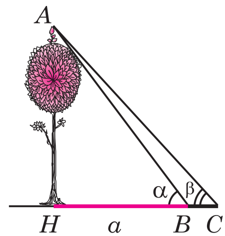


Рис. 331

Если основание предмета недоступно, то можно поступить так: на прямой, проходящей через основание H предмета, отметим две точки B и C на определённом расстоянии a друг от друга и измерим углы ABH и ACB: $\angle ABH = \alpha$ и $\angle ACB = \beta$ (см. рис. 331). Эти данные позволяют определить все элементы треугольника ABC, в частности AB. В самом деле, $\angle ABH$ — внешний угол треугольника ABC, поэтому $\angle A = \alpha - \beta$. Используя теорему синусов, находим AB:

$$AB = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Из прямоугольного треугольника ABH находим высоту AH предмета:

$$AH = AB \cdot \sin \alpha.$$

Итак, $$AH = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Измерение расстояния до недоступной точки. Предположим, что нам надо найти расстояние d от пункта A до недоступного пункта C (рис. 332). Напомним, что эту задачу мы уже решали в 8 классе с помощью признаков подобия треугольников. Рассмотрим теперь другой способ решения задачи — с использованием формул тригонометрии.

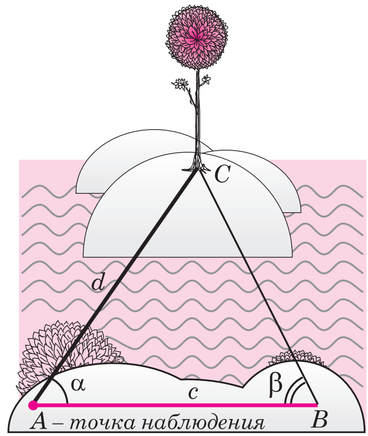


Рис. 332

На местности выберем точку B и измерим длину c отрезка AB. Затем измерим, например с помощью астролябии, углы A и B: $\angle A = \alpha$ и $\angle B = \beta$. Эти данные, т. е. c, α и β, позволяют решить треугольник ABC и найти искомое расстояние $d = AC$.

Сначала находим $\angle C$ и $\sin C$:

$$\angle C = 180° - \alpha - \beta,$$
$$\sin C = \sin(180° - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

Затем с помощью теоремы синусов находим d. Так как $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$, $AC = d$, $AB = c$, $\angle B = \beta$, то $d = \dfrac{c \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Аналогичным образом по так называемому параллаксу небесных светил определяют расстояния до этих светил.

Задачи

1109 Найдите площадь треугольника ABC, если: а) $AB = 6\sqrt{8}$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60°$; б) $BC = 3$ см, $AB = 18\sqrt{2}$ см, $\angle B = 45°$; в) $AC = 14$ см, $CB = 7$ см, $\angle C = 48°$.

1110 Докажите, что площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними.

1111 Площадь треугольника ABC равна 60 см². Найдите сторону AB, если $AC = 15$ см, $\angle A = 30°$.

1112 Найдите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 10 см, а угол между диагоналями равен 30°.

1113 Найдите площадь треугольника ABC, если:
а) $\angle A = \alpha$, а высоты, проведённые из вершин B и C, соответственно равны h_b и h_c;
б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а высота, проведённая из вершины B, равна h.

1114 С помощью теорем синусов и косинусов решите треугольник ABC, если:

а) $\angle A = 60°$, $\angle B = 40°$, $c = 14$; б) $\angle A = 30°$, $\angle C = 75°$, $b = 4{,}5$;
в) $\angle A = 80°$, $a = 16$, $b = 10$; г) $\angle B = 45°$, $\angle C = 70°$, $a = 24{,}6$;
д) $\angle A = 60°$, $a = 10$, $b = 7$; е) $a = 6{,}3$, $b = 6{,}3$, $\angle C = 54°$;
ж) $b = 32$, $c = 45$, $\angle A = 87°$; з) $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$;
и) $a = 6$, $b = 7{,}3$, $c = 4{,}8$.

1115 В треугольнике ABC известно, что $AC = 12$ см, $\angle A = 75°$, $\angle C = 60°$. Найдите AB и S_{ABC}.

1116 Найдите стороны треугольника ABC, если $\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, а высота AD равна 3 м.

1117 В параллелограмме $ABCD$ известно, что $AD = 7\frac{1}{3}$ м, $BD = 4{,}4$ м, $\angle A = 22°30'$. Найдите $\angle BDC$ и $\angle DBC$.

1118 Найдите биссектрисы треугольника, если одна из его сторон равна a, а прилежащие к этой стороне углы равны α и β.

1119 Смежные стороны параллелограмма равны a и b, а один из его углов равен α. Найдите диагонали параллелограмма и угол между ними.

1120 Выясните, является ли треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным, если его стороны равны: а) 5, 4 и 4; б) 17, 8 и 15; в) 9, 5 и 6.

1121 Две равные по величине силы приложены к одной точке под углом 72° друг к другу. Найдите величины этих сил, если величина их равнодействующей равна 120 кг.

1122 Докажите, что отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

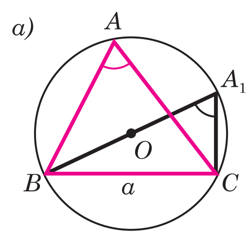
Решение

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Докажем, что

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R, \text{ или } BC = 2R\sin A.$$

Проведём диаметр BA_1 (рис. 333) и рассмотрим треугольник A_1BC (случай, когда точки A_1 и C совпадают, рассмотрите самостоятельно). Угол C этого треугольника прямой, поэтому $BC = BA_1 \cdot \sin A_1$. Но $\sin A_1 = \sin A$. Действительно, если точка A_1 лежит на дуге BAC (рис. 333, *а*), то $\angle A_1 = \angle A$, а если на дуге BDC (рис. 333, *б*), то $\angle A_1 = 180° - \angle A$. И в том, и в другом случае $\sin A_1 = \sin A$. Следовательно,

$$BC = BA_1 \cdot \sin A, \text{ или } BC = 2R\sin A.$$



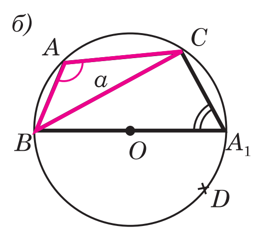


Рис. 333

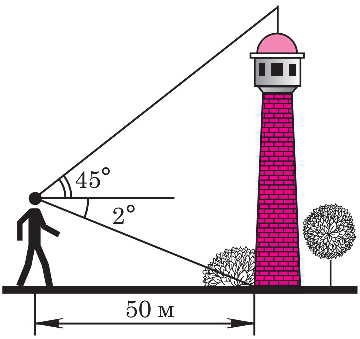


Рис. 334

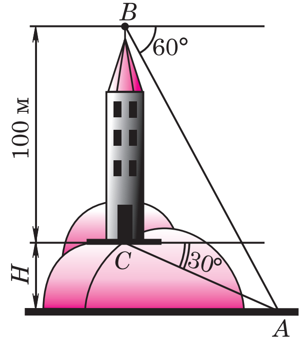


Рис. 335

1123 В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне, большее основание равно 10 см, а угол при основании равен 70°. Найдите периметр трапеции.

1124 В окружности проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке E. Найдите острый угол между этими хордами, если $AB=13$ см, $CE=9$ см, $ED=4$ см и расстояние между точками B и D равно $4\sqrt{3}$ см.

1125 Наблюдатель находится на расстоянии 50 м от башни, высоту которой хочет определить (рис. 334). Основание башни он видит под углом 2° к горизонту, а вершину — под углом 45° к горизонту. Какова высота башни?

1126 Для определения ширины реки отметили два пункта A и B на берегу реки на расстоянии 70 м друг от друга и измерили углы CAB и ABC, где C — дерево, стоящее на другом берегу у кромки воды. Оказалось, что $\angle CAB = 12°30'$, $\angle ABC = 72°42'$. Найдите ширину реки.

1127 На горе находится башня, высота которой равна 100 м (рис. 335). Некоторый предмет A у подножия горы наблюдают сначала с вершины B башни под углом 60° к горизонту, а потом с её основания C под углом 30°. Найдите высоту H горы.

§3 Скалярное произведение векторов

109. Угол между векторами

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два данных вектора. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи OA и OB образуют угол AOB (рис. 336). Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что **угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α.** Ясно, что α не зависит от выбора точки O, от которой откладываются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (пользуясь рисунком 336, докажите это). Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $0°$. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

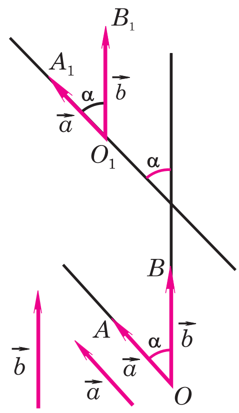


Рис. 336

На рисунке 337 углы между векторами равны соответственно: $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 30°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}} = 120°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = 90°$, $\widehat{\vec{d}\vec{f}} = 0°$, $\widehat{\vec{d}\vec{c}} = 180°$.

Два вектора называются **перпендикулярными**, если угол между ними равен $90°$. На рисунке 337 $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$, $\vec{b} \perp \vec{f}$.

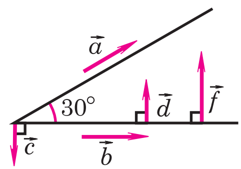


Рис. 337

110. Скалярное произведение векторов

Мы знаем, как выполняется сложение векторов и умножение вектора на число. Введём ещё одно действие над векторами — скалярное умножение векторов.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$.

По определению

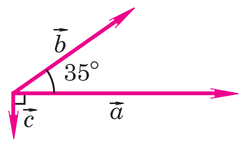
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}). \qquad (1)$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, т. е. $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 90°$, то $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 0$, и поэтому $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Обратно: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, то из равенства (1) получаем $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = 0$, и, следовательно, $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 90°$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Таким образом, **скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.**

Из формулы (1) также следует, что скалярное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ положительно (отрицательно) тогда и только тогда, когда $\widehat{\vec{a}\vec{b}} < 90°$ ($\widehat{\vec{a}\vec{b}} > 90°$).

На рисунке 338 $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 35°$, $\widehat{\vec{a}\vec{c}} = 90°$, $\widehat{\vec{b}\vec{c}} = 125°$, поэтому $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} < 0$.



$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} < 0$

Рис. 338

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то по формуле (1) получаем $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. В частности,

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$. Таким образом, **скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

Скалярное произведение векторов широко используется в физике. Например, из курса механики известно, что работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении тела из точки M в точку N (рис. 339) равна произведению длин векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\overrightarrow{MN}$ на косинус угла между ними:

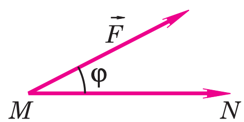


Рис. 339

$$A = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos \varphi.$$

Правая часть этого равенства представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\overrightarrow{MN}$, т. е. работа A силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению векторов силы и перемещения: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$.

111. Скалярное произведение в координатах

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов.

Теорема

В прямоугольной системе координат скалярное произведение векторов $\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2. \qquad (2)$$

Доказательство

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость равенства (2) очевидна, так как координаты нулевого вектора равны нулю. Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (рис. 340, *а*), то по теореме косинусов

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos\alpha. \qquad (3)$$

Это равенство верно и в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (рис. 340, *б*, *в*).

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то равенство (3) можно записать так: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\vec{b}$, откуда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right). \qquad (4)$$

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{b} - \vec{a}$ имеют соответственно координаты $\{x_1; y_1\}$, $\{x_2; y_2\}$ и $\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$, поэтому

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2,\ |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2,$$
$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

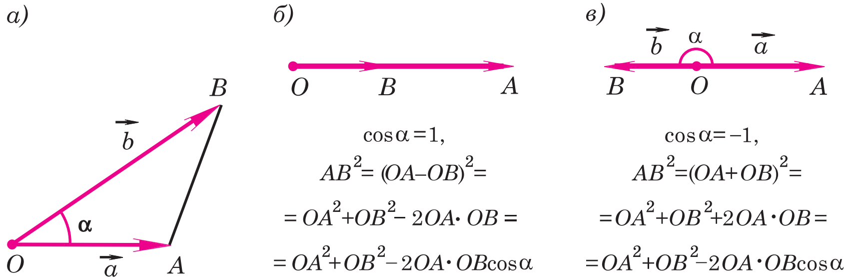


Рис. 340

Подставив эти выражения в правую часть равенства (4), после несложных преобразований получим формулу (2). **Теорема доказана.**

Следствие 1

Ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Следствие 2

Косинус угла α между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \qquad (5)$$

В самом деле, так как $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$, то $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Подставив сюда выражения для $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим формулу (5).

112. Свойства скалярного произведения векторов

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1⁰. $\vec{a}^2 \geqslant 0$, причём $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2⁰. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).

3⁰. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).

4⁰. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

Утверждение 1^0 непосредственно следует из формулы $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, а утверждение 2^0 — из определения скалярного произведения. Докажем утверждения 3^0 и 4^0.

Введём прямоугольную систему координат и обозначим координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ так:

$$\vec{a}\,\{x_1;\, y_1\},\ \vec{b}\,\{x_2;\, y_2\},\ \vec{c}\,\{x_3;\, y_3\}.$$

Используя формулу (2), получаем

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(x_1+x_2)\,x_3+(y_1+y_2)\,y_3=$$
$$=(x_1x_3+y_1y_3)+(x_2x_3+y_2y_3)=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Утверждение 3^0 доказано.

Докажем теперь утверждение 4^0. Вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $\{kx_1;\, ky_1\}$, поэтому $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=$ $=(kx_1)\,x_2+(ky_1)\,y_2=k\,(x_1x_2+y_1y_2)=k\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Замечание

Ясно, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d}.$$

Задачи

1128 Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$; г) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OB}$; д) $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$; е) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$; ж) $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DB}$; з) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$.

1129 Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, и диагональ BD равна стороне ромба. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AD}$; г) $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$; д) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

1130 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, а угол между ними равен: а) 45°; б) 90°; в) 135°.

1131 В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1132 К одной и той же точке приложены две силы $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, действующие под углом 120° друг к другу, причём $|\vec{P}|=8$, $|\vec{Q}|=15$. Найдите величину равнодействующей силы $\vec{R}$.

1133 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}\left\{\frac{1}{4}; -1\right\}$, $\vec{b}\{2; 3\}$; б) $\vec{a}\{-5; 6\}$, $\vec{b}\{6; 5\}$;

в) $\vec{a}\{1{,}5; 2\}$, $\vec{b}\{4; -0{,}5\}$.

1134 Докажите, что ненулевые векторы $\vec{a}\{x; y\}$ и $\vec{b}\{-y; x\}$ перпендикулярны.

1135 Докажите, что векторы $\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{i}-\vec{j}$ перпендикулярны, если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

1136 При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если: а) $\vec{a}\{4; 5\}$, $\vec{b}\{x; -6\}$; б) $\vec{a}\{x; -1\}$, $\vec{b}\{3; 2\}$; в) $\vec{a}\{0; -3\}$, $\vec{b}\{5; x\}$?

1137 Найдите косинусы углов треугольника с вершинами $A\,(2; 8)$, $B\,(-1; 5)$, $C\,(3; 1)$.

1138 Найдите углы треугольника с вершинами $A\,(-1; \sqrt{3})$, $B\,(1; -\sqrt{3})$ и $C\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

1139 Вычислите $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\vec{b}}=60°$.

1140 Известно, что $\widehat{\vec{a}\vec{c}}=\widehat{\vec{b}\vec{c}}=60°$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$.

1141 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=4$ и $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1142 Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$ и $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1143 Докажите, что если AM — медиана треугольника ABC, то $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Пользуясь этой формулой, докажите, что медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, равны.

Решение

Точка M — середина отрезка BC, поэтому $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Отсюда получаем

$$(2\overrightarrow{AM})\cdot(2\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=$$
$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=$$
$$=AB^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A+AC^2,$$

или $4AM^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Второе утверждение задачи докажите самостоятельно.

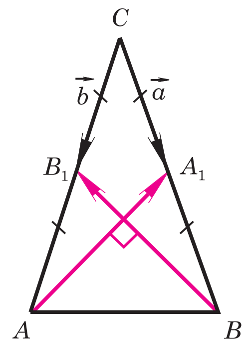


Рис. 341

1144 Найдите угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника, если медианы, проведённые к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Решение

Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB и AA_1, BB_1 — его медианы, проведённые к боковым сторонам (рис. 341). Введём обозначения $\overrightarrow{CA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB_1}=\vec{b}$, $CA_1=CB_1=a$. Тогда $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CA}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{CB}==\vec{b}-2\vec{a}$, поэтому

$$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}-2\vec{a})=5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{b}. \qquad (6)$$

По условию задачи $AA_1\perp BB_1$ и, следовательно, $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$. Далее, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2\cos C$, $\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=a^2$, поэтому равенство (6) принимает вид $0=5a^2\cos C-4a^2$. Отсюда получаем $\cos C=\frac{4}{5}$, $\angle C\approx 36°52'$.

1145 Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Вопросы для повторения к главе XII

1 Начертите оси координат и постройте единичную полуокружность.

2 Объясните, что такое синус и косинус угла α из промежутка $0°\leqslant\alpha\leqslant 180°$.

3 Что называется тангенсом угла α? Для какого значения α тангенс не определён и почему?

4 Что называется котангенсом угла α? Для каких значений α котангенс не определён и почему?

5 Докажите основное тригонометрическое тождество.

6 Напишите формулы приведения.

7 Выведите формулы, выражающие координаты точки A с неотрицательной ординатой через длину отрезка OA и угол между лучом OA и положительной полуосью Ox.

8 Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника (вычисление площади треугольника по двум сторонам и углу между ними).

9 Сформулируйте и докажите теорему синусов.

10 Сформулируйте и докажите теорему косинусов.

11 Что означают слова «решение треугольника»? Сформулируйте три основные задачи на решение треугольника и объясните, как они решаются.

12 Объясните, как определить высоту предмета, основание которого недоступно.

13 Объясните, как измерить расстояние до недоступной точки.

14 Объясните, что означают слова «угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α». В каком случае угол между векторами считается равным $0°$?

15 Какие два вектора называются перпендикулярными?

16 Что такое скалярное произведение двух векторов?

17 В каком случае скалярное произведение ненулевых векторов: а) равно 0; б) больше 0; в) меньше 0?

18 Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их координаты.

19 Запишите условие перпендикулярности двух ненулевых векторов с координатами $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$.

20 Выведите формулу, выражающую косинус угла между ненулевыми векторами через их координаты.

21 Сформулируйте и докажите утверждения о свойствах скалярного произведения векторов.

22 Приведите пример использования скалярного произведения векторов при решении геометрических задач.

Дополнительные задачи

1146 В равнобедренном треугольнике ABC $AB = AC = b$, $\angle A = 30°$. Найдите высоты BE и AD, а также отрезки AE, EC, BC.

1147 Найдите площадь треугольника ABC, если:
а) $BC = 4{,}125$ м, $\angle B = 44°$, $\angle C = 72°$;
б) $BC = 4100$ м, $\angle A = 32°$, $\angle C = 120°$.

1148 Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

1149 Используя теорему синусов, решите треугольник ABC, если:
а) $AB = 8$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 45°$;
б) $AB = 5$ см, $\angle B = 45°$, $\angle C = 60°$;
в) $AB = 3$ см, $BC = 3{,}3$ см, $\angle A = 48°30'$;
г) $AC = 10{,}4$ см, $BC = 5{,}2$ см, $\angle B = 62°48'$.

1150 Используя теорему косинусов, решите треугольник ABC, если:
а) $AB = 5$ см, $AC = 7{,}5$ см, $\angle A = 135°$;
б) $AB = 2\sqrt{2}$ дм, $BC = 3$ дм, $\angle B = 45°$;
в) $AC = 0{,}6$ м, $BC = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ дм, $\angle C = 150°$.

1151 В треугольнике DEF известно, что $DE = 4{,}5$ дм, $EF = 9{,}9$ дм, $DF = 70$ см. Найдите углы треугольника.

1152 Найдите биссектрису AD треугольника ABC, если $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$.

1153 Чтобы определить расстояние между точками A и B, которое нельзя измерить, выбирают третью точку C, из которой видны точки A и B. Измерив угол ACB и расстояния AC и CB, находят расстояние AB. Найдите AB, если $AC = b$, $CB = a$, $\angle ACB = \alpha$.

1154 Докажите, что треугольник с вершинами $A\,(3; 0)$, $B\,(1; 5)$ и $C\,(2; 1)$ тупоугольный. Найдите косинус тупого угла.

1155 Найдите длину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — координатные векторы.

1156 Найдите диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\widehat{\vec{p}\vec{q}} = 45°$.

1157 При каком значении x векторы $\vec{p} = x\vec{a} + 17\vec{b}$ и $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярны, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ и $\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 120°$?

1158 В прямоугольном равнобедренном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Найдите острый угол между этими медианами.

1159 В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ см и $BC = 8$ см боковая сторона равна $4\sqrt{7}$ см, а $\angle ADC = 60°$. Через вершину C проведена прямая l, делящая трапецию на два многоугольника, площади которых равны. Найдите площадь трапеции и длину отрезка прямой l, заключённого внутри трапеции.

1160 В треугольнике ABC, площадь которого равна $3\sqrt{3}$, угол A острый, $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 3$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

1161 Дан ромб $MNPQ$. Отрезок MF — биссектриса треугольника MPQ, $\angle NMQ = 4\alpha$, $FQ = a$. Найдите площадь данного ромба.

Применение скалярного произведения векторов к решению задач

1162 Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC и $BM = kMC$. Докажите, что

$$(1+k)^2\, AM^2 = k^2b^2 + 2bck\cos A + c^2,$$

где $b = AC$, $c = AB$.

Решение

По условию задачи точка M лежит на отрезке BC и $BM = kMC$, поэтому $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{MC}$ или $\overrightarrow{BM} = k\,(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM})$. Следовательно,

$$\overrightarrow{BM} = \frac{k}{1+k}\,\overrightarrow{BC} = \frac{k}{1+k}\,(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

По правилу треугольника сложения векторов $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, или $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\,(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{k}{1+k}\,\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\,\overrightarrow{AC}$. Таким образом,

$$(1+k)\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}.$$

Отсюда получаем

$$(1+k)^2\,(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC})\,(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}) =$$
$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} + 2k\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + k^2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

Так как

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM} = AM^2,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = c^2,$$
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} = b^2,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = bc\cos A,$$

то полученная формула совпадает с искомой формулой.

1163 Четырёхугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин: $A\,(-1; 2)$, $B\,(1; -2)$, $C\,(2; 0)$, $D\,(1; 6)$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция, и найдите её площадь.

1164 В треугольнике ABC отрезок AD — биссектриса, отрезок AM — медиана, $b = AC$, $c = AB$. Докажите, что:

а) $AD = \dfrac{2bc}{b+c}\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$;

б) $AM = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}$.

1165 Диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны. Докажите, что этот параллелограмм является ромбом.

1166 Докажите, что коэффициент подобия двух подобных треугольников равен отношению радиусов окружностей: а) описанных около треугольников; б) вписанных в эти треугольники.

Глава XIII

Длина окружности и площадь круга

Вы знаете, как измеряются отрезки и как измеряются площади многоугольников. Вам известны формулы, по которым можно вычислить площади треугольника и некоторых четырёхугольников. А как вычислить длину окружности и площадь круга, если известен их радиус? Ответ на этот вопрос вы найдёте в этой главе. Но сначала нам предстоит познакомиться с красивыми геометрическими фигурами — правильными многоугольниками, вывести для них важные формулы, а затем уже с их помощью мы получим формулы длины окружности и площади круга.

§1 Правильные многоугольники

113. Правильный многоугольник

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.

Примерами правильных многоугольников являются равносторонний треугольник и квадрат. На рисунке 342 изображены правильные пятиугольник, семиугольник и восьмиугольник.

Выведем формулу для вычисления угла α_n правильного n-угольника. Сумма всех углов такого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180°$, причём все его углы равны, поэтому

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n}\cdot 180°.$$

114. Окружность, описанная около правильного многоугольника

Напомним, что окружность называется описанной около многоугольника, если все вершины многоугольника лежат на этой окружности. Докажем теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

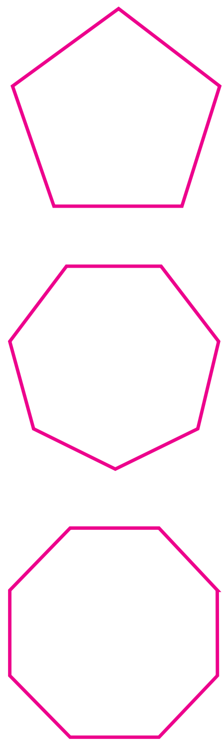


Рис. 342

Теорема

Около любого правильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Доказательство

Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ — правильный многоугольник, O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2 (рис. 343).

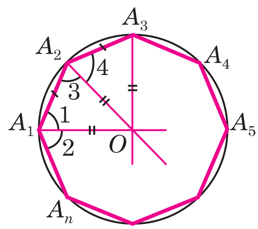


Рис. 343

Соединим точку O отрезками с остальными вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$. Так как $\angle A_1 = \angle A_2$, то $\angle 1 = \angle 3$, поэтому треугольник A_1A_2O равнобедренный: в нём $OA_1 = OA_2$. Треугольники A_1A_2O и A_2A_3O равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_3A_2$, A_2O — общая сторона и $\angle 3 = \angle 4$), следовательно, $OA_3 = OA_1$. Точно так же можно доказать, что $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ и т. д.

Итак, $OA_1 = OA_2 = ... = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника. Поэтому окружность с центром O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника.

Докажем теперь, что описанная окружность только одна. Рассмотрим какие-нибудь три вершины многоугольника, например A_1, A_2, A_3. Так как через эти точки проходит только одна окружность, то около многоугольника $A_1A_2A_3...A_n$ можно описать только одну окружность.

Теорема доказана.

115. Окружность, вписанная в правильный многоугольник

Напомним, что окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются этой окружности. Докажем теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

Теорема

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

Доказательство

Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный многоугольник, O — центр описанной окружности (рис. 344).

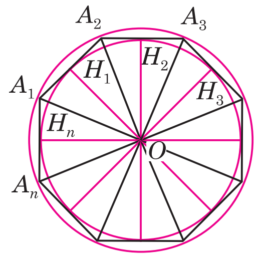


Рис. 344

В ходе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что

$$\triangle OA_1A_2 = \triangle OA_2A_3 = ... = \triangle OA_nA_1,$$

поэтому высоты этих треугольников, проведённые из вершины O, также будут равны:

$$OH_1 = OH_2 = ... = OH_n.$$

Отсюда следует, что окружность с центром O и радиусом OH_1 проходит через точки H_1, H_2, ..., H_n и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписана в данный правильный многоугольник.

Докажем теперь, что вписанная окружность только одна.

Предположим, что наряду с окружностью с центром O и радиусом OH_1 есть и другая окружность, вписанная в многоугольник $A_1A_2...A_n$. Тогда её центр O_1 равноудалён от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника и, следовательно, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. равен OH_1. Таким образом, вторая окружность совпадает с первой.

Теорема доказана.

Следствие 1

Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается сторон многоугольника в их серединах.

Следствие 2

Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же многоугольник.

Эта точка называется **центром правильного многоугольника.**

116. Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

Пусть S — площадь правильного n-угольника, a_n — его сторона, P — периметр, а r и R — радиусы соответственно вписанной и описанной окружностей. Докажем сначала, что

$$S = \frac{1}{2}Pr. \qquad (1)$$

Соединим центр данного многоугольника с его вершинами (рис. 344). Тогда многоугольник разобьётся на n равных треугольников, площадь каждого из которых будет равна $\frac{1}{2}a_n r$. Следовательно,

$$S = n \cdot \frac{1}{2}a_n r = \frac{1}{2}(na_n)\,r = \frac{1}{2}Pr.$$

Выведем далее формулы:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}, \qquad (2)$$

$$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}. \qquad (3)$$

Для вывода этих формул воспользуемся рисунком 344. В прямоугольном треугольнике A_1H_1O

$$\angle A_1 = \frac{\alpha_n}{2} = \frac{n-2}{2n}\cdot 180^\circ = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно,

$$a_n = 2A_1H_1 = 2R\cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = 2R\sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$r = OH_1 = R \sin\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

Полагая в формуле (2), что $n = 3$, 4 и 6, получим выражения для сторон правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника:

$$a_3 = 2R \sin \frac{180^\circ}{3} = 2R \sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3},$$

$$a_4 = 2R \sin \frac{180^\circ}{4} = 2R \sin 45^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2},$$

$$a_6 = 2R \sin \frac{180^\circ}{6} = 2R \sin 30^\circ = 2R \cdot \frac{1}{2} = R. \quad (4)$$

117. Построение правильных многоугольников

Рассмотрим способы построения некоторых правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Построения правильного треугольника и правильного четырёхугольника, т. е. квадрата, рассматривались ранее. Для построения правильных n-угольников при $n > 4$ обычно используется окружность, описанная около многоугольника.

Задача 1

Построить правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

Решение

Для решения задачи воспользуемся формулой (4). Пусть PQ — данный отрезок. Построим окружность радиуса PQ и отметим на ней произвольную точку A_1 (рис. 345). Затем, не меняя раствора циркуля, построим на этой окружности точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 так, чтобы выполнялись равенства $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6$. Соединяя последовательно построенные точки отрезками, получим искомый правильный шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$.

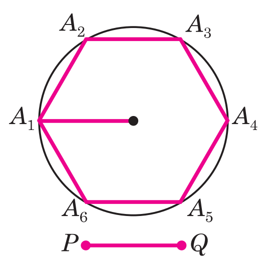


Рис. 345

Для построения правильных многоугольников часто используется следующая задача:

Задача 2

Дан правильный n-угольник. Построить правильный $2n$-угольник.

Решение

Пусть $A_1A_2...A_n$ — данный правильный n-угольник. Опишем около него окружность. Для этого построим биссектрисы углов A_1 и A_2 и обозначим буквой O точку их пересечения. Затем проведём окружность с центром O радиуса OA_1 (см. рис. 343).

Для решения задачи достаточно разделить дуги A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 пополам и каждую из точек деления B_1, B_2, ..., B_n соединить отрезками с концами соответствующей дуги (рис. 346, на этом рисунке $n=6$). Для построения точек B_1, B_2, ..., B_n можно воспользоваться серединными перпендикулярами к сторонам данного n-угольника. На рисунке 346 таким способом построен правильный двенадцатиугольник $A_1B_1A_2B_2...A_6B_6$.

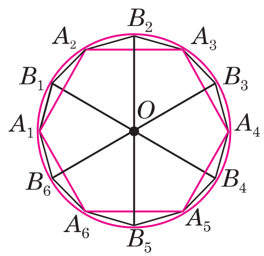


Рис. 346

Применяя указанный способ, можно с помощью циркуля и линейки построить целый ряд правильных многоугольников, если построен один из них. Например, построив правильный четырёхугольник, т. е. квадрат, и пользуясь результатом задачи 2, можно построить правильный восьмиугольник, затем правильный шестнадцатиугольник и вообще правильный 2^k-угольник, где k — любое целое число, большее двух.

Замечание

Рассмотренные примеры показывают, что многие правильные многоугольники могут быть построены с помощью циркуля и линейки. Оказывается, однако, что не все правильные многоугольники допускают такое построение. Доказано, например, что правильный семиугольник не может быть построен при помощи циркуля и линейки. Любопытно, что с помощью этих инструментов можно построить правильный семнадцатиугольник.

Задачи

1167 Верно ли утверждение: а) любой правильный многоугольник является выпуклым; б) любой выпуклый многоугольник является правильным? Ответ обоснуйте.

1168 Какие из следующих утверждений верны: а) многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны; б) треугольник является правильным, если все его углы равны; в) любой равносторонний треугольник является правильным; г) любой четырёхугольник с равными сторонами является правильным? Ответ обоснуйте.

1169 Докажите, что любой правильный четырёхугольник является квадратом.

1170 Найдите углы правильного n-угольника, если: а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = 6$; г) $n = 10$; д) $n = 18$.

1171 Чему равна сумма внешних углов правильного n-угольника, если при каждой вершине взято по одному внешнему углу?

1172 Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен: а) 60°; б) 90°; в) 135°; г) 150°?

1173 Сколько сторон имеет правильный вписанный многоугольник, если дуга описанной окружности, которую стягивает его сторона, равна: а) 60°; б) 30°; в) 90°; г) 36°; д) 18°; е) 72°?

1174 Докажите, что серединные перпендикуляры к любым двум сторонам правильного многоугольника либо пересекаются, либо совпадают.

1175 Докажите, что прямые, содержащие биссектрисы любых двух углов правильного многоугольника, либо пересекаются, либо совпадают.

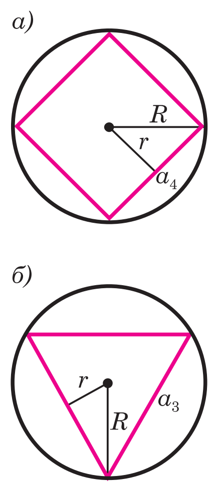


Рис. 347

1176 На рисунке 347, *а* изображён квадрат, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_4 — сторона квадрата, P — периметр квадрата, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

N	R	r	a_4	P	S
1			6		
2		2			
3	4				
4				28	
5					16

1177 На рисунке 347, *б* изображён правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса R. Перечертите таблицу в тетрадь и заполните пустые клетки (a_3 — сторона треугольника, P — периметр треугольника, S — его площадь, r — радиус вписанной окружности).

N	R	r	a_3	P	S
1	3				
2					10
3		2			
4			5		
5				6	

1178 Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен 18 см. Найдите сторону квадрата, вписанного в ту же окружность.

1179 Сечение головки газового вентиля имеет форму правильного треугольника, сторона которого равна 3 см. Каким должен быть минимальный диаметр круглого железного стержня, из которого изготовляют вентиль?

1180 Поперечное сечение деревянного бруска является квадратом со стороной 6 см. Найдите наибольший диаметр круглого стержня, который можно выточить из этого бруска.

1181 Около окружности описаны квадрат и правильный шестиугольник. Найдите периметр квадрата, если периметр шестиугольника равен 48 см.

1182 Около правильного треугольника описана окружность радиуса R. Докажите, что $R = 2r$, где r — радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

1183 Найдите площадь S правильного n-угольника, если: а) $n = 4$, $R = 3\sqrt{2}$ см; б) $n = 3$, $P = 24$ см; в) $n = 6$, $r = 9$ см; г) $n = 8$, $r = 5\sqrt{3}$ см.

1184 Расстояние между параллельными гранями шестигранной головки болта, основание которого имеет форму правильного шестиугольника, равно 1,5 см. Найдите площадь основания.

1185 Стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника равны друг другу. Найдите отношения площадей этих многоугольников.

1186 Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников — вписанного в окружность и описанного около неё.

1187 Выразите сторону, периметр и площадь правильного треугольника: а) через радиус вписанной окружности; б) через радиус описанной окружности.

1188 Правильный восьмиугольник $A_1A_2...A_8$ вписан в окружность радиуса R. Докажите, что четырёхугольник $A_3A_4A_7A_8$ является прямоугольником, и выразите его площадь через R.

1189 С помощью циркуля и линейки в данную окружность впишите: а) правильный шестиугольник; б) правильный треугольник; в) квадрат; г) правильный восьмиугольник.

§2 Длина окружности и площадь круга

118. Длина окружности

Рис. 348

Чтобы получить наглядное представление о длине окружности, представим себе, что окружность сделана из тонкой нерастяжимой нити. Если мы разрежем нить в какой-нибудь точке A и распрямим её, то получим отрезок AA_1, длина которого и есть длина окружности (рис. 348).

Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближённым значением длины окружности. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближённое значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон всё ближе и ближе «прилегает» к окружности (рис. 349). Точное значение длины окружности — это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

Выведем формулу, выражающую длину окружности через её радиус. Пусть C и C' — длины окружностей радиусов R и R'. Впишем в каждую из них правильный n-угольник и обозначим через P_n и P'_n их периметры, а через a_n и a'_n их стороны. Используя формулу (2) из § 1, получаем

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin\frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin\frac{180^\circ}{n}.$$

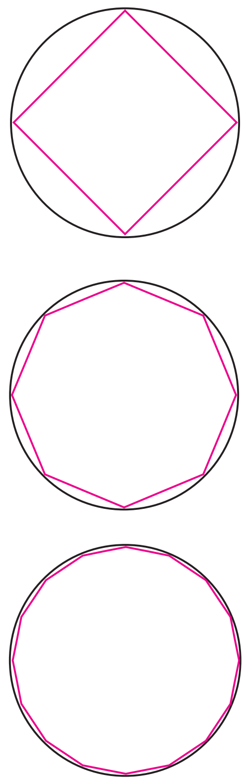


Рис. 349

Следовательно,

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (1)$$

Это равенство справедливо при любом значении n. Будем теперь неограниченно увеличивать число n. Так как $P_n \to C$, $P'_n \to C'$ при $n \to \infty$, то предел отношения $\frac{P_n}{P'_n}$ равен $\frac{C}{C'}$. С другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен $\frac{2R}{2R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. Из этого равенства следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, т. е. **отношение длины окружности к её диаметру есть одно и то же число для всех окружностей.** Это число принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R:

$$C = 2\pi R.$$

Доказано, что π является бесконечной непериодической десятичной дробью, т. е. иррациональным числом. Рациональное число $\frac{22}{7}$ является приближённым значением числа π. Это приближённое значение было найдено ещё в III в. до н. э. великим греческим учёным Архимедом. При решении задач обычно пользуются значением $\pi \approx 3{,}14$.

Выведем теперь формулу для вычисления длины l дуги окружности с градусной мерой α. Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина дуги в $1°$ равна $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Поэтому длина l выражается формулой

$$l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha.$$

119. Радианная мера угла

Рассмотрим ещё один способ измерения углов и дуг окружности.

Если длина l дуги AB окружности равна радиусу R этой окружности (рис. 350), то из формулы $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ следует:

$$R = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha \text{, откуда } \alpha = \frac{180}{\pi} \approx 57°17'44''.$$

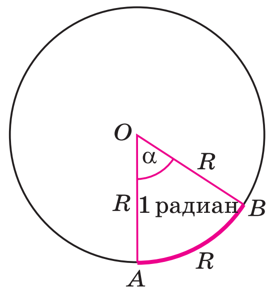


Рис. 350

Полученная градусная мера дуги меньше 180°, поэтому соответствующий дуге центральный угол окружности имеет такую же градусную меру (см. п. 79). Так как найденное значение α не зависит от выбора окружности, то такой центральный угол часто выбирается за единицу измерения углов, он называется **углом в 1 радиан или радианом.**

Итак, **градусная мера угла в 1 радиан составляет** $\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$.

Положительное число φ, которое показывает, сколько раз радиан и его части укладываются в некотором угле, называется **радианной мерой угла** (пишут: φ рад).

Установим **связь между градусной и радианной мерой одного и того же угла.** Из определения радиана следует, что углу, градусная мера которого равна 180°, соответствует π радиан. Тогда углу в 1° соответствует в 180 раз меньше, т. е. $\frac{\pi}{180}$ радиан. Следовательно, углу, градусная мера которого равна $\alpha°$, соответствует $\frac{\pi}{180}\alpha$ радиан. Если φ — радианная мера угла, то ей соответствует градусная мера $\left(\frac{180}{\pi} \cdot \varphi\right)^{\circ}$.

Отметим, что измерение углов в радианах имеет большое значение: упрощается запись при использовании тригонометрических формул, а при значениях φ меньше 0,01 рад можно считать $\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi \approx \varphi$.

Поскольку градусная мера угла не превосходит 180°, то и радианная мера угла не превосходит π радиан.

Если дуга окружности меньше полуокружности или равна полуокружности, то её радианная мера также не превосходит π радиан. Если дуга окружности больше полуокружности, то, очевидно, её радианная мера больше π радиан. Например, для дуги, градусная мера которой 240°, её радианная мера составит $\frac{\pi}{180} \cdot 240 = \frac{4\pi}{3}$ радиан.

Найдём формулу, выражающую длину l дуги окружности радиуса R через её радианную меру φ. Радианной мере φ соответствует градусная мера $\frac{180}{\pi} \cdot \varphi$. Поэтому $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \varphi$, откуда $l = R\varphi$.

120. Площадь круга

Напомним, что **кругом** называется часть плоскости, ограниченная окружностью. Круг радиуса R с центром O содержит точку O и все точки плоскости, находящиеся от точки O на расстоянии, не большем R.

Выведем формулу для вычисления площади круга радиуса R. Для этого рассмотрим правильный n-угольник $A_1A_2...A_n$, вписанный в окружность, ограничивающую круг (рис. 351). Очевидно, площадь S данного круга больше площади S_n многоугольника $A_1A_2...A_n$, так как этот многоугольник целиком содержится в данном круге. С другой стороны, площадь S_n' круга, вписанного в многоугольник, меньше S_n, так как этот круг целиком содержится в многоугольнике. Итак,

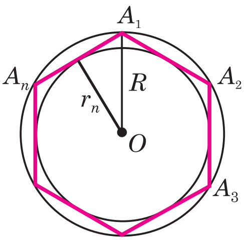


Рис. 351

$$S_n' < S_n < S. \qquad (2)$$

Будем теперь неограниченно увеличивать число сторон многоугольника. По формуле (3) § 1 имеем $r_n = R\cos\frac{180°}{n}$, где r_n — радиус вписанной в многоугольник окружности. При $n \to \infty$ $\cos\frac{180°}{n} \to 1$, поэтому $r_n \to R$. Иными словами, при неограниченном увеличении числа сторон многоугольника вписанная в него окружность стремится к описанной окружности, поэтому $S'_n \to S$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенств (2) следует, что $S_n \to S$ при $n \to \infty$.

По формуле (1) на с. 297 имеем $S_n = \frac{1}{2}P_n r_n$, где P_n — периметр многоугольника $A_1A_2...A_n$. Учитывая, что $r_n \to R$, $P_n \to 2\pi R$, $S_n \to S$ при $n \to \infty$, получаем $S = \frac{1}{2}\,2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Итак, для вычисления площади S круга радиуса R мы получили формулу

$$\boldsymbol{S = \pi R^2}.$$

Замечание

В течение веков усилия многих математиков были направлены на решение задачи, получившей название **задача о квадратуре круга**: построить при помощи циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

Только в конце XIX в. было доказано, что такое построение невозможно.

121. Площадь кругового сектора

Круговым сектором или просто сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга. Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора**. На рисунке 352, *а* изображены два сектора с дугами ALB и AMB. Первый из этих секторов закрашен.

Выведем формулу для вычисления площади S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с градусной мерой α.

Так как площадь всего круга равна πR^2, то площадь кругового сектора, ограниченного дугой в 1°, равна $\frac{\pi R^2}{360}$. Поэтому площадь S выражается формулой

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha.$$

Круговым сегментом или просто сегментом называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы этой дуги (рис. 352, *б*).

Если градусная мера дуги меньше 180°, то площадь сегмента можно найти, вычитая из площади сектора площадь равнобедренного треугольника, сторонами которого являются два радиуса и хорда сегмента.

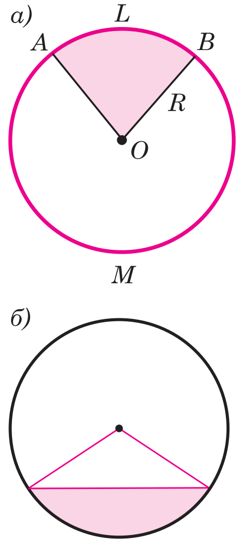


Рис. 352

Задачи

1190 Перечертите таблицу и, используя формулу длины C окружности радиуса R, заполните пустые клетки таблицы. Воспользуйтесь значением $\pi \approx 3{,}14$.

C			82	18π		6,28			$2\sqrt{2}$
R	4	3			0,7		101,5	$2\frac{1}{3}$	

1191 Как изменится длина окружности, если радиус окружности: а) увеличить в 3 раза; б) уменьшить в 2 раза; в) увеличить в k раз; г) уменьшить в k раз?

1192 Как изменится радиус окружности, если длину окружности: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

1193 Найдите длину окружности, описанной около: а) правильного треугольника со стороной a; б) прямоугольного треугольника с катетами a и b; в) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b; г) прямоугольника с меньшей стороной a и острым углом α между диагоналями; д) правильного шестиугольника, площадь которого равна $24\sqrt{3}$ см^2.

1194 Найдите длину окружности, вписанной: а) в квадрат со стороной a; б) в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой c; в) в прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α; г) в равнобедренный треугольник с углом при основании α и высотой h, проведённой к основанию.

1195 Автомобиль прошёл 989 м. Найдите диаметр колеса автомобиля, если известно, что оно сделало 500 оборотов.

1196 Метр составляет приближённо $\frac{1}{40\,000\,000}$ часть земного экватора. Найдите диаметр Земли в километрах, считая, что Земля имеет форму шара.

1197 Вычислите длину круговой орбиты искусственного спутника Земли, если спутник вращается на расстоянии 320 км от поверхности Земли, а радиус Земли равен 6370 км.

1198 Найдите длину дуги окружности радиуса 6 см, если её градусная мера равна: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

1199 Расстояние между серединами зубьев зубчатого колеса, измеренное по дуге окружности, равно 47,1 мм. Диаметр колеса равен 450 мм. Сколько зубьев имеет колесо?

1200 Шлифовальный камень, имеющий форму диска, находится в защитном кожухе (рис. 353). Диаметр камня равен 58 см, дуга незащищённой его части равна 117°. Найдите длину дуги незащищённой части камня.

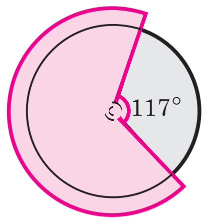


Рис. 353

1201 Найдите длину маятника стенных часов, если угол его колебания составляет 38°, а длина дуги, которую описывает конец маятника, равна 24 см.

1202 Радиус закругления пути железнодорожного полотна равен 5 км, а длина дуги закругления — 400 м. Какова градусная мера дуги закругления?

1203 Перечертите таблицу, и, используя связь между градусной и радианной мерой одного и того же угла, заполните пустые клетки.

Градусная мера угла	$\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$		1°	90°			45°	30°			150°	n°	
Радианная мера угла	1	π			$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{5}$			$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$			φ

1204 Постройте угол, радианная мера которого равна: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{\pi}{6}$; д) π; е) $\frac{2\pi}{3}$.

1205 Перечертите таблицу и, используя формулу для площади S круга радиуса R, заполните пустые клетки. Воспользуйтесь значением $\pi \approx 3{,}14$.

S			9		49π			6,25
R	2	5		$\frac{2}{7}$		54,3	$\sqrt{3}$	

1206 Как изменится площадь круга, если его радиус: а) увеличить в k раз; б) уменьшить в k раз?

1207 Найдите площадь круга, описанного около: а) прямоугольника со сторонами a и b; б) прямоугольного треугольника с катетом a и противолежащим углом α; в) равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h, проведённой к основанию.

1208 Найдите площадь круга, вписанного: а) в равносторонний треугольник со стороной a; б) в прямоугольный треугольник с катетом a и прилежащим к нему острым углом α; в) в равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом α, противолежащим основанию; г) в равнобедренную трапецию с бóльшим основанием a и острым углом α.

1209 Диаметр основания Царь-колокола, находящегося в Московском Кремле, равен 6,6 м. Найдите площадь основания колокола.

1210 Длина окружности цирковой арены равна 41 м. Найдите диаметр и площадь арены.

1211 Найдите площадь кольца, ограниченного двумя окружностями с общим центром и радиусами R_1 и R_2, $R_1 < R_2$. Вычислите площадь кольца, если $R_1 = 1{,}5$ см, $R_2 = 2{,}5$ см.

1212 Какой толщины слой нужно снять с круглой медной проволоки, имеющей площадь сечения 314 мм^2, чтобы она проходила сквозь отверстие диаметром 18,5 мм?

1213 Вокруг круглой клумбы, радиус которой равен 3 м, проложена дорожка шириной 1 м. Сколько нужно песка, чтобы посыпать дорожку, если на 1 м^2 дорожки требуется 0,8 дм^3 песка?

1214 Из круга радиуса r вырезан квадрат, вписанный в окружность, которая ограничивает круг. Найдите площадь оставшейся части круга.

1215 На мишени имеются четыре окружности с общим центром, радиусы которых равны 1, 2, 3 и 4. Найдите площадь наименьшего круга, а также площадь каждого из трёх колец мишени.

1216 На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

1217 Из круга, радиус которого 10 см, вырезан сектор с дугой в $60°$. Найдите площадь оставшейся части круга.

1218 Площадь сектора с центральным углом $72°$ равна S. Найдите радиус сектора.

1219 Сторона квадрата, изображённого на рисунке 354, равна a. Вычислите площадь закрашенной фигуры.

1220 Докажите, что площадь S кругового сектора радиуса R, ограниченного дугой с радианной мерой φ, вычисляется по формуле $S = \frac{\varphi R^2}{2}$.

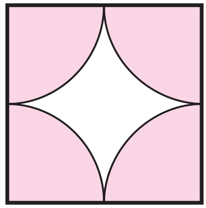


Рис. 354

Вопросы для повторения к главе XIII

1 Какой многоугольник называется правильным? Приведите примеры правильных многоугольников.

2 Выведите формулу для вычисления угла правильного n-угольника.

3 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около правильного многоугольника.

4 Сформулируйте и докажите теорему об окружности, вписанной в правильный многоугольник.

5 Выведите формулу для вычисления площади правильного многоугольника через его периметр и радиус вписанной окружности.

6 Выведите формулы для вычисления стороны правильного n-угольника и радиуса вписанной в него окружности через радиус описанной окружности.

7 Как выражаются стороны правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника через радиус описанной окружности?

8 Выведите формулу для вычисления длины окружности, используя её градусную меру.

9 Объясните, какое число обозначается буквой π и чему равно его приближённое значение.

10 Выведите формулу для вычисления длины дуги окружности, используя её градусную меру.

11 Какой угол называется углом в 1 радиан?

12 Объясните, как связаны градусная и радианная меры одного и того же угла.

13 Выведите формулу для вычисления длины дуги окружности, используя её радианную меру.

14 Выведите формулу для вычисления площади круга.

15 Что такое круговой сектор? Выведите формулу для вычисления площади кругового сектора.

16 Что такое круговой сегмент? Объясните, как можно вычислить его площадь.

Дополнительные задачи

1221 Сколько сторон имеет правильный многоугольник, один из внешних углов которого равен: а) 18°; б) 40°; в) 72°; г) 60°?

1222 На стороне правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 3 дм, построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

1223 Найдите периметр правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, если $A_1A_4 = 2{,}24$ см.

1224 Найдите отношение периметров правильного треугольника и квадрата: а) вписанных в одну и ту же окружность; б) описанных около одной и той же окружности.

1225 Диагонали A_1A_6 и A_2A_9 правильного двенадцатиугольника пересекаются в точке B (рис. 355). Докажите, что: а) треугольники A_1A_2B и A_6A_9B равносторонние; б) $A_1A_6 = 2r$, где r — радиус вписанной в двенадцатиугольник окружности.

1226 Диагонали A_1A_4 и A_2A_7 правильного десятиугольника $A_1A_2...A_{10}$, вписанного в окружность радиуса R, пересекаются в точке B (рис. 356). Докажите, что: а) $A_2A_7 = 2R$; б) $\triangle A_1A_2B$ и $\triangle BA_4O$ — подобные равнобедренные треугольники; в) $A_1A_4 - A_1A_2 = R$.

1227 В круг, площадь которого равна 36π см², вписан правильный шестиугольник. Найдите сторону этого шестиугольника и его площадь.

1228 Квадрат $A_1A_2A_3A_4$ вписан в окружность радиуса R (рис. 357). На его сторонах отмечены восемь точек так, что $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = A_1C_1 = A_2C_2 = A_3C_3 = A_4C_4 = R$. Докажите, что восьмиугольник $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ правильный, и выразите площадь этого восьмиугольника через радиус R.

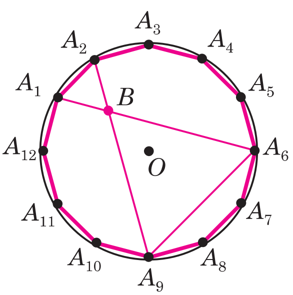


Рис. 355

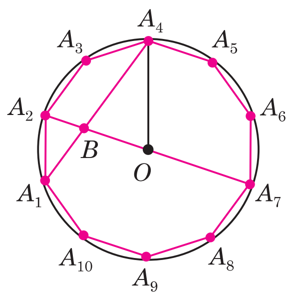


Рис. 356

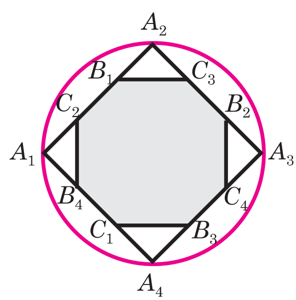


Рис. 357

1229 За два оборота по круговой орбите вокруг Земли космический корабль проделал путь 84 152 км. На какой высоте над поверхностью Земли находится корабль, если радиус Земли равен 6370 км?

1230 Найдите длину окружности, вписанной в ромб, если:
а) диагонали ромба равны 6 см и 8 см;
б) сторона ромба равна a и острый угол равен α.

1231 Лесной участок имеет форму круга. Чтобы обойти этот участок по опушке, идя со скоростью 4 км/ч, нужно затратить на 45 мин больше, чем для того, чтобы пересечь его по диаметру. Найдите длину опушки данного участка.

1232 В правильный многоугольник вписана окружность. Докажите, что отношение площади круга, ограниченного этой окружностью, к площади многоугольника равно отношению длины окружности к периметру многоугольника.

1233 Фигура ограничена бо́льшими дугами двух окружностей, имеющих общую хорду, длина которой равна 6 см. Для одной окружности эта хорда является стороной вписанного квадрата, для другой — стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите сумму длин этих дуг.

1234 Основания трапеции, около которой можно описать окружность, равны 4 см и 14 см, а одна из боковых сторон равна 13 см. Найдите длину описанной окружности.

1235 Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разделяет треугольник на два подобных треугольника (см. задачу, п. 71). Докажите, что отношение длин окружностей, вписанных в эти треугольники, равно коэффициенту подобия этих треугольников.

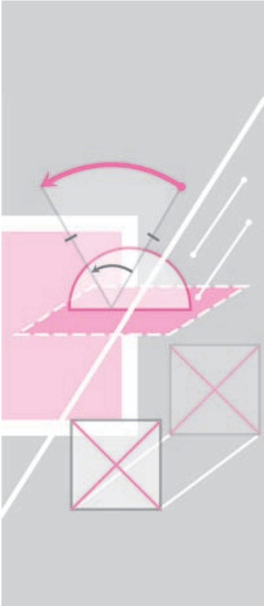
Задачи на построение

1236* Постройте правильный восьмиугольник, сторона которого равна данному отрезку.

1237* Даны два круга. Постройте круг, площадь которого равна сумме площадей данных кругов.

1238 Около данной окружности опишите: а) правильный треугольник; б) правильный шестиугольник.

1239 Около данной окружности опишите: а) правильный четырёхугольник; б) правильный восьмиугольник.



Глава XIV

Преобразования плоскости. Движения

Слово «движение» вам знакомо. А что оно означает в геометрии? Скорее всего, вы сразу представляете себе какое-либо перемещение фигуры без искажения её размеров, изменение положения по отношению к другим фигурам. В этой главе мы познакомимся с понятием взаимно однозначного отображения плоскости на себя (преобразованием плоскости). Затем, определив понятие движения, изучим некоторые его виды и свойства. Вы убедитесь, что движения плоскости являются теми самыми наложениями, которые мы применяли для определения равенства фигур и изучения их свойств. В данной главе вы узнаете, что с помощью движений удаётся находить красивые решения различных геометрических задач, познакомитесь с понятием внутренней симметрии фигуры, попытаетесь посмотреть на окружающие нас предметы с точки зрения движений.

§1 Преобразования плоскости

122. Отображение плоскости на себя

Представим себе, что каждой точке плоскости сопоставляется (ставится в соответствие) по определённому правилу какая-то одна точка этой же плоскости, причём любая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой единственной точке.

Такое соответствие называется **взаимно однозначным отображением плоскости на себя или преобразованием плоскости.**

Фактически мы уже встречались с преобразованиями плоскости — вспомним осевую (пп. 44 и 45) и центральную симметрии (п. 53).

При осевой симметрии с осью a (рис. 358) каждой точке M плоскости соответствует симметричная ей точка M_1 относительно прямой a (если точка M лежит на прямой a, то она считается симметричной самой себе). При этом любая точка M_1 оказывается сопоставленной некоторой точке M.

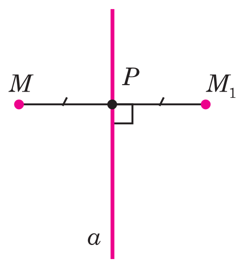


Рис. 358

При центральной симметрии с центром O (рис. 359) каждой точке A плоскости соответствует симметричная ей точка A_1 относительно точки O (точка O считается симметричной самой себе). При этом любая точка A_1 оказывается сопоставленной некоторой точке A.

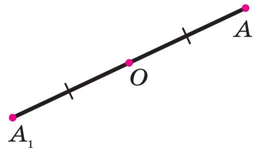


Рис. 359

Если точка при некотором преобразовании соответствует сама себе, то она называется **неподвижной точкой** данного преобразования. Осевая симметрия имеет прямую неподвижных точек — ось симметрии. Центральная симметрия имеет единственную неподвижную точку — центр симметрии.

Пусть F — какая-либо фигура и каждой её точке M преобразование плоскости ставит в соответствие точку M_1. В результате преобразования получим некоторую фигуру F_1. Фигуры F_1 и F называют **соответственными** при данном преобразовании. Говорят также, что фигура F **переходит в фигуру** F_1, а фигура F_1 **получена из фигуры** F при заданном преобразовании плоскости.

123. Понятие движения плоскости

Пусть M и N — две любые точки, а M_1 и N_1 — соответственные им точки при некотором преобразовании плоскости. Говорят, что **преобразование плоскости сохраняет расстояние между точками**, если равны длины отрезков $MN = M_1N_1$. Любое преобразование плоскости, сохраняющее расстояние, называется **движением** (или **перемещением**) плоскости.

Осевая симметрия и центральная симметрия — это примеры движений. Для осевой симметрии соответствующее свойство — сохранять расстояния между точками — мы доказали в пункте 45. Пользуясь рисунками 360, *а–в*, докажите самостоятельно, что центральная симметрия сохраняет расстояние между точками.

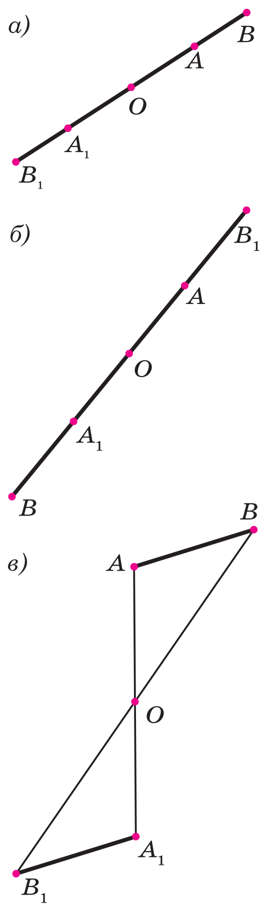


Рис. 360

Докажем следующую теорему.

Теорема

При движении отрезок отображается на отрезок.

Доказательство

Пусть при заданном движении плоскости концы M и N отрезка MN отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 361). Докажем, что каждая точка отрезка MN отображается в некоторую точку отрезка M_1N_1. Пусть P — произвольная точка отрезка MN, P_1 — точка, в которую отображается точка P. Тогда $MP + PN = MN$. Так как при движении расстояния сохраняются, то

$$M_1N_1 = MN,\ M_1P_1 = MP \text{ и } N_1P_1 = NP. \qquad (1)$$

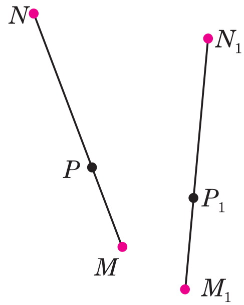


Рис. 361

Из равенств (1) получаем, что $M_1P_1 + P_1N_1 = M_1N_1$, и, значит, точка P_1 лежит на отрезке M_1N_1 (если предположить, что это не так, то будет выполняться неравенство $M_1P_1 + P_1N_1 > M_1N_1$). Итак, точки отрезка MN отображаются в точки отрезка M_1N_1.

Нужно ещё доказать, что в каждую точку P_1 отрезка M_1N_1 отображается какая-нибудь точка P отрезка MN. Докажем это. Пусть P_1 — произвольная точка отрезка M_1N_1, и точка P при заданном движении отображается в точку P_1. Из соотношений (1) и равенства $M_1N_1 = M_1P_1 + P_1N_1$ следует, что

$$MP + PN = MN,$$

и, значит, точка P лежит на отрезке MN.

Теорема доказана.

Следствие

При движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

В самом деле, в силу доказанной теоремы при движении каждая сторона треугольника отображается на равный ей отрезок, поэтому и треугольник отображается на треугольник с соответственно равными сторонами, т. е. на равный треугольник.

Пользуясь доказанной теоремой, нетрудно убедиться в том, что при движении прямая отображается на прямую, луч — на луч, а угол — на равный ему угол.

124*. Наложения и движения

Напомним, что в нашем курсе геометрии равенство фигур определяется с помощью наложений. Мы говорим, что фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, если фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$. Понятие наложения в нашем курсе относится к основным понятиям геометрии, поэтому определение наложения не даётся. Под наложением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ мы понимаем некоторое отображение фигуры Ф на фигуру $Ф_1$. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Ф, но и любая точка плоскости отображается в определённую точку плоскости, т. е. **наложение — это отображение плоскости на себя**.

Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. приложение 1, аксиомы 7—13). Эти аксиомы позволяют доказать все те свойства наложений, которые мы себе представляем наглядно и которыми пользуемся при доказательстве теорем и решении задач. Докажем, например, что **при наложении различные точки отображаются в различные точки**.

В самом деле, предположим, что это не так, т. е. при некотором наложении какие-то две точки A и B отображаются в одну и ту же точку C. Тогда фигура $Ф_1$, состоящая из точек A и B, равна фигуре $Ф_2$, состоящей из одной точки C. Отсюда следует, что $\Phi_2 = \Phi_1$ (аксиома 12), т. е. при некотором наложении фигура Φ_2 отображается в фигуру Φ_1. Но это невозможно, так как наложение — это отображение, а при любом отображении точке C ставится в соответствие только одна точка плоскости.

Из доказанного утверждения следует, что при наложении отрезок отображается на равный ему отрезок. Действительно, пусть при наложении концы A и B отрезка AB отображаются в точки A_1 и B_1. Тогда отрезок AB отображается на отрезок A_1B_1 (аксиома 7), и, следовательно, отрезок AB равен отрезку A_1B_1. Так как равные отрезки имеют равные длины, то наложение является отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния, т. е. **любое наложение является движением плоскости**.

Докажем, что верно и обратное утверждение.

Теорема

Любое движение является наложением.

Доказательство

Рассмотрим произвольное движение (обозначим его буквой g) и докажем, что оно является наложением. Возьмём какой-нибудь треугольник ABC. При движении g он отображается на равный ему треугольник $A_1B_1C_1$. По определению равных треугольников существует наложение f, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1.

Докажем, что движение g совпадает с наложением f. Предположим, что это не так. Тогда на плоскости найдётся хотя бы одна такая точка M, которая при движении g отображается в точку M_1, а при наложении f — в другую точку M_2. Так как при отображениях f и g сохраняются расстояния, то $AM = A_1M_1$, $AM = A_1M_2$, поэтому $A_1M_1 = A_1M_2$, т. е. точка A_1 равноудалена от точек M_1 и M_2 (рис. 362). Аналогично доказывается, что точки B_1 и C_1 равноудалены от точек M_1 и M_2. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на серединном перпендикуляре к отрезку M_1M_2. Но это невозможно, так как вершины треугольника $A_1B_1C_1$ не лежат на одной прямой. Таким образом, отображения f и g совпадают, т. е. движение g является наложением.

Теорема доказана.

Следствие

При движении любая фигура отображается на равную ей фигуру.

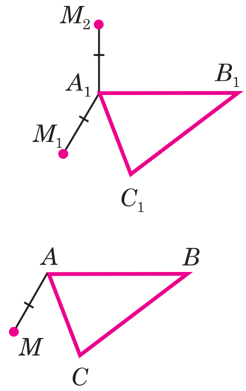


Рис. 362

Задачи

1240 Докажите, что при осевой симметрии плоскости:
а) прямая, параллельная оси симметрии, отображается на прямую, параллельную оси симметрии;
б) прямая, перпендикулярная к оси симметрии, отображается на себя.

1241 Докажите, что при центральной симметрии плоскости:
а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую;
б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

1242 Докажите, что при движении угол отображается на равный ему угол.

Решение

Пусть при данном движении угол AOB отображается на угол $A_1O_1B_1$, причём точки A, O, B отображаются соответственно в точки A_1, O_1, B_1. Так как при движении сохраняются расстояния, то $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$. Если угол AOB неразвёрнутый, то треугольники AOB и $A_1O_1B_1$ равны по трём сторонам, и, следовательно, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Если угол AOB развёрнутый, то и угол $A_1O_1B_1$ развёрнутый (докажите это), поэтому эти углы равны.

1243 Докажите, что при движении четырехугольник отображается на четырехугольник.

1244 Докажите, что при движении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые.

1245 Докажите, что при движении: а) параллелограмм отображается на параллелограмм; б) трапеция отображается на трапецию; в) ромб отображается на ромб; г) прямоугольник отображается на прямоугольник, а квадрат — на квадрат.

1246 Докажите, что при движении окружность отображается на окружность того же радиуса.

1247 Докажите, что отображение плоскости, при котором каждая точка отображается на себя, является наложением.

1248 ABC и $A_1B_1C_1$ — произвольные треугольники. Докажите, что существует не более одного движения, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1, C_1.

1249 В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Докажите, что существует движение, при котором точки A, B и C отображаются в точки A_1, B_1 и C_1, и притом только одно.

Решение

По условию задачи треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трём сторонам. Следовательно, существует наложение, т. е. движение, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1. Это движение является единственным движением, при котором точки A, B и C отображаются соответственно в точки A_1, B_1 и C_1 (задача **1248**).

1250 Докажите, что два параллелограмма равны, если смежные стороны и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны смежным сторонам и углу между ними другого параллелограмма.

1251 Даны две прямые a и b. Постройте прямую, на которую отображается прямая b при осевой симметрии с осью a.

1252 Даны прямая a и четырёхугольник $ABCD$. Постройте фигуру F, на которую отображается данный четырёхугольник при осевой симметрии с осью a. Что представляет собой фигура F?

1253 Какие из следующих утверждений справедливы: а) если фигуры F и F_1 симметричны относительно точки O, то фигура F_1 получена центральной симметрией из фигуры F; б) если фигуры F и F_1 симметричны относительно прямой p, то фигура F получена осевой симметрией из фигуры F_1; в) если фигура F_1 получена движением плоскости из фигуры F, то F и F_1 симметричны относительно некоторой прямой?

1254 Даны две прямые a и a_1. Докажите, что существует движение, которое отображает прямую a на прямую a_1.

1255 Докажите, что последовательное выполнение двух движений плоскости является движением плоскости.

1256 Фигура F_1 получена из фигуры F осевой симметрией с осью l, а фигура F_2 — из фигуры F центральной симметрией с центром в точке O. Равны ли фигуры F_1 и F_2? Ответ обоснуйте.

1257 Докажите следующие утверждения: а) если фигура P равна фигуре Q, то фигура Q равна фигуре P; б) если фигура P равна фигуре Q, а фигура Q равна фигуре R, то фигура P равна фигуре R.

§2 Параллельный перенос и поворот

125. Параллельный перенос

Пусть $\vec{a}$ — данный вектор. **Параллельным переносом** на вектор $\vec{a}$ называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что вектор $\overrightarrow{MM_1}$ равен вектору $\vec{a}$ (рис. 363).

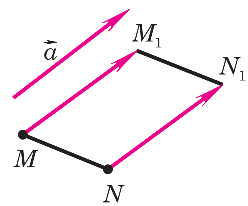


Рис. 363

Параллельный перенос является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния. Докажем это. Пусть при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 363). Так как $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NN_1} = \vec{a}$, то $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{NN_1}$. Отсюда следует, что $MM_1 \parallel NN_1$ и $MM_1 = NN_1$, поэтому четырёхугольник MM_1N_1N — параллелограмм. Следовательно, $MN = M_1N_1$, т. е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1 (случаи, когда точки M и N расположены на прямой, параллельной вектору $\vec{a}$, рассмотрите самостоятельно). Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение. Наглядно это движение можно представить себе как сдвиг всей плоскости в направлении данного вектора $\vec{a}$ на его длину.

В случае, когда вектор $\vec{a}$ нулевой, каждая точка плоскости отображается на себя, т. е. является неподвижной точкой. Преобразование плоскости, при котором каждая точка является неподвижной, называется **тождественным преобразованием**.

Параллельный перенос на ненулевой вектор не имеет неподвижных точек.

126. Поворот

Отметим на плоскости точку O (центр поворота) и зададим угол α (угол поворота). **Поворотом плоскости** вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости на себя, при котором каждая точка M отображается в такую точку M_1, что $OM = OM_1$ и угол MOM_1 равен α (рис. 364). При этом точка O является неподвижной, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении — по часовой стрелке или против часовой стрелки.

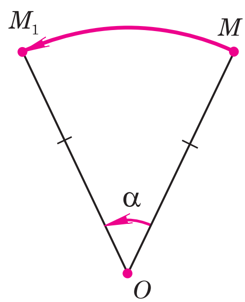


Рис. 364

Поворот является движением, т. е. отображением плоскости на себя, сохраняющим расстояния.

Докажем это. Пусть O — центр поворота, α — угол поворота против часовой стрелки (случай поворота по часовой стрелке рассматривается аналогично). Допустим, что при этом повороте точки M и N отображаются в точки M_1 и N_1 (рис. 365). Треугольники OMN и OM_1N_1 равны по двум сторонам и углу между ними: $OM = OM_1$, $ON = ON_1$ и $\angle MON = \angle M_1ON_1$ (для случая, изображённого на рисунке 365, каждый из этих углов равен сумме угла α и угла M_1ON). Из равенства этих треугольников следует, что $MN = M_1N_1$, т. е. расстояние между точками M и N равно расстоянию между точками M_1 и N_1 (случай, когда точки O, M и N расположены на одной прямой, рассмотрите самостоятельно). Итак, поворот сохраняет расстояния между точками и поэтому представляет собой движение. Это движение можно представить себе как поворот всей плоскости вокруг данной точки O на данный угол α.

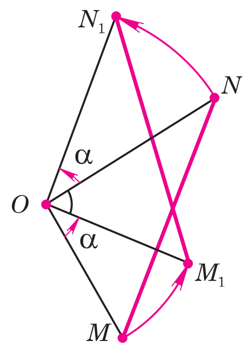


Рис. 365

Замечание.

Поворот на 180° вокруг некоторой точки O является центральной симметрией относительно точки O (объясните почему).

Задачи

1258 Начертите отрезок AB и вектор $\overrightarrow{MM_1}$. Постройте отрезок A_1B_1, который получается из отрезка AB параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{MM_1}$.

1259 Начертите треугольник ABC, вектор $\overrightarrow{MM_1}$, который не параллелен ни одной из сторон треугольника, и вектор $\vec{a}$, параллельный стороне AC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, который получается из треугольника ABC параллельным переносом: а) на вектор $\overrightarrow{MM_1}$; б) на вектор $\vec{a}$.

1260 Даны равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и такая точка D на прямой AC, что точка C лежит на отрезке AD. а) Постройте отрезок B_1D, который получается из отрезка BC параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{CD}$. б) Докажите, что четырёхугольник ABB_1D — равнобедренная трапеция.

1261 Даны треугольник, трапеция и окружность. Постройте фигуры, которые получаются из этих фигур параллельным переносом на данный вектор $\vec{a}$.

1262 Даны две пары параллельных прямых: $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, причём $a \nparallel b$. Постройте вектор параллельного переноса, при котором прямые a и b отображаются на прямые a_1 и b_1 соответственно.

1263 Постройте отрезок A_1B_1, который получается из данного отрезка AB поворотом вокруг данного центра O: а) на $120°$ по часовой стрелке; б) на $75°$ против часовой стрелки; в) на $180°$.

1264 Постройте треугольник, который получается из данного треугольника ABC поворотом вокруг точки A на угол $150°$ против часовой стрелки.

1265 Точка D является точкой пересечения биссектрис равностороннего треугольника ABC. Докажите, что при повороте вокруг неё на угол $120°$ треугольник ABC отображается на себя.

1266 Докажите, что при повороте квадрата вокруг точки пересечения его диагоналей на угол $90°$ квадрат отображается на себя.

1267 Постройте окружность, которая получается из данной окружности с центром C поворотом вокруг точки O на угол $60°$ против часовой стрелки, если: а) точки O и C не совпадают; б) точки O и C совпадают.

1268 Постройте прямую a_1, которая получается из прямой a поворотом вокруг точки O на угол $60°$ по часовой стрелке, если прямая a: а) не проходит через точку O; б) проходит через точку O.

Решение

а) Построим окружность с центром O, которая касается прямой a (объясните, как это сделать). Пусть M — точка касания. При повороте вокруг точки O эта окружность отображается на себя, а касательная a отображается на некоторую касательную a_1 (объясните почему). Для построения прямой a_1 построим сначала точку M_1, в которую отображается точка M при повороте вокруг точки O на угол 60° по часовой стрелке, а затем проведём касательную a_1 к окружности в точке M_1.

1269 Если при повороте вокруг точки O на некоторый угол прямая a переходит в прямую a_1, то угол между прямыми a и a_1 либо равен углу поворота, либо дополняет его до 180°. Докажите.

1270 Даны два равных и а) параллельных; б) не параллельных отрезка. Постройте центр O поворота, при котором один отрезок отображается на другой.

§3 Симметрии фигур

127. Понятие симметрии фигур

В том случае, когда фигура отображается на себя при осевой симметрии, говорят, что фигура обладает осевой симметрией (см. п. 44). Если фигура отображается на себя при некотором повороте (в частности, центральной симметрии), то говорят, что фигура обладает поворотной (в частности, центральной) симметрией. Если же фигура отображается на себя в результате параллельного переноса на ненулевой вектор, то говорят о переносной симметрии фигуры.

Внутренней симметрией (или симметрией) фигуры называется любое движение плоскости, отличное от тождественного преобразования, которое фигуру отображает на себя.

Например, равнобедренный, но не равносторонний треугольник имеет одну симметрию – это осевая симметрия относительно серединного перпендикуляра к основанию этого треугольника (рис. 366). У равностороннего треугольника пять

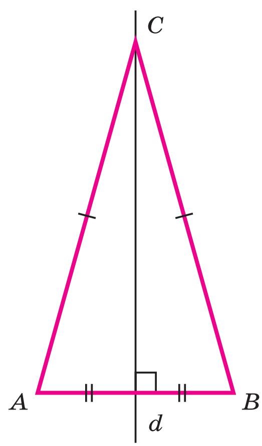


Рис. 366

симметрий: три осевые симметрии и две поворотные симметрии вокруг центра треугольника на 120° по часовой и против часовой стрелки (рис. 367). У квадрата уже семь симметрий: четыре осевые симметрии, одна центральная симметрия и две поворотные симметрии вокруг центра квадрата на 90° по часовой и против часовой стрелки (рис. 368).

Окружность имеет бесконечно много симметрий: это осевые симметрии с осями, проходящими через центр окружности, всевозможные поворотные симметрии вокруг центра окружности, в том числе центральная симметрия (рис. 369).

Рассмотрим две параллельные прямые и часть плоскости между ними. Такую геометрическую фигуру называют полосой. Прямые, ограничивающие полосу, называют её краями. Полоса, как и окружность, имеет бесконечно много симметрий — это и осевые, и центральные, и переносные симметрии (рис. 370).

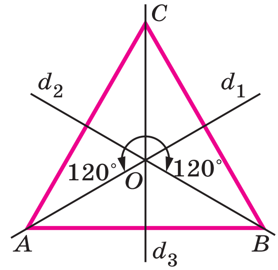


Рис. 367

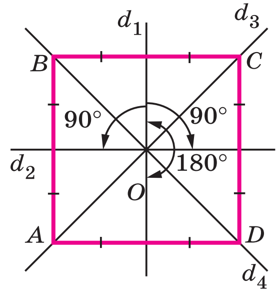


Рис. 368

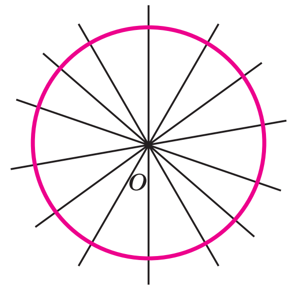


Рис. 369

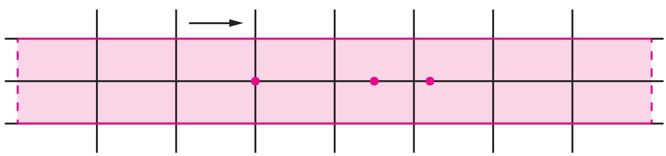


Рис. 370

128. Практические приложения симметрий

Важным элементом декоративно-прикладного искусства является орнамент — узор, основанный на повторе и чередовании составляющих его элементов. Орнамент применяется в качестве художественного оформления строений, интерьера помещений, наносится на ткани, мебель, обои

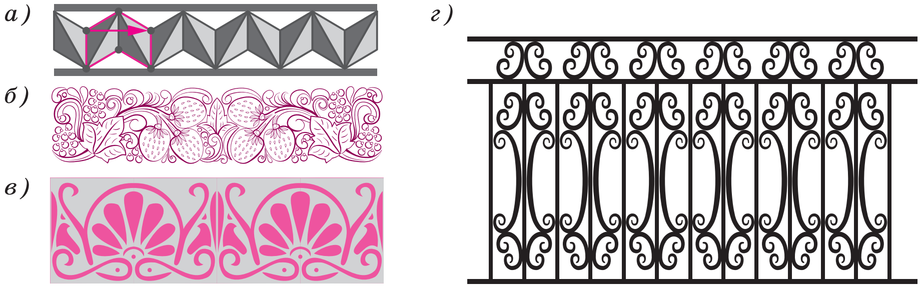


Рис. 371

и другие изделия, которые мы используем в быту и практической деятельности.

Одним из видов орнамента является бордюр. Бордюр — это линейный орнамент, периодически повторяющийся рисунок на длинной ленте (рис. 371, *а–г*). Если представить эту ленту бесконечной, то бордюр может быть совмещён сам с собой параллельным переносом.

При создании бордюров, кроме параллельного переноса, используются осевая и центральная симметрии.

Простейший бордюр построить просто: достаточно изобразить какую-нибудь фигуру и выполнить параллельный перенос на заданный вектор влево и вправо вдоль полосы столько раз, сколько необходимо.

Орнамент, повторяющийся внутри круга или правильного многоугольника, называется розеткой (рис. 372, *а*, *б*). Розетка обладает поворотной симметрией. Построить розетку можно следующим образом: поделить круг на некоторое количество равных секторов; в одном из секторов задать какую-нибудь геометрическую фигуру, а затем выполнить поворот вокруг центра круга, который сектор с фигурой отобразит на соседний сектор.

Паркет (замощение или мозаика) — бесконечное семейство многоугольников, покрывающее плоскость без просветов и перекрытий (рис. 373, *а*, *б*). В паркетах наблюдаются разные виды симметрий.

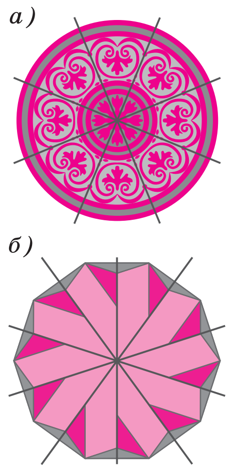


Рис. 372

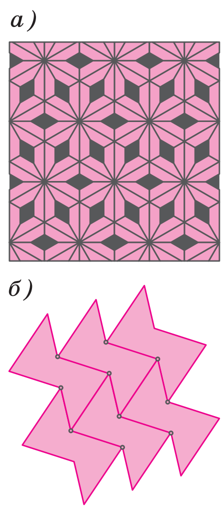


Рис. 373

129. Применение движений к решению задач

Задача 1

На сторонах AC и BC произвольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDH$ и $BCEF$ (рис. 374). Докажите, что отрезки AE и DB равны и перпендикулярны.

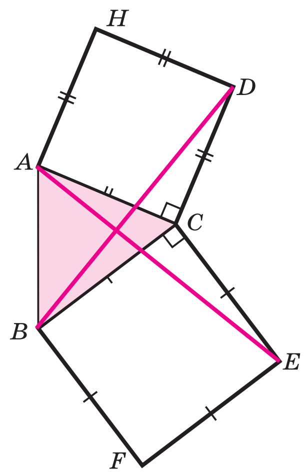


Рис. 374

Решение

При повороте с центром C на $90°$ по часовой стрелке точки A и E отображаются соответственно на точки D и B (объясните почему). Следовательно, отрезок AE отображается на отрезок BD. Это означает, что отрезки AE и BD равны и угол между ними равен углу поворота (см. задачу 1269).

Задача 2

Даны прямая p и точки A и B, лежащие по одну сторону от неё. Докажите, что на прямой p существует единственная точка M, такая, что сумма расстояний AM и MB имеет наименьшее значение.

Решение

На прямой p требуется построить точку M так, чтобы $AM + MB < AX + XB$ выполнялось для любой точки X прямой p, отличной от точки M.

Пусть X — произвольная точка прямой p. Построим точку B_1, симметричную точке B (рис. 375). Отрезки XB_1 и XB симметричны относительно прямой p, поэтому $XB = XB_1$ (п. 45). Отсюда следует, что $AX + XB = AX + XB_1$. Теперь мы можем легко найти такое положение точки X на прямой p, при котором сумма $AX + XB_1$ является наименьшей. Пусть M — точка пересечения отрезка AB_1 с прямой p. Если точка X отлична от точки M, то в треугольнике AXB_1 имеем: $AX + XB_1 > AB_1$. Так как $AB_1 = AM + MB_1$, то $AX + XB_1 > AM + MB_1$.

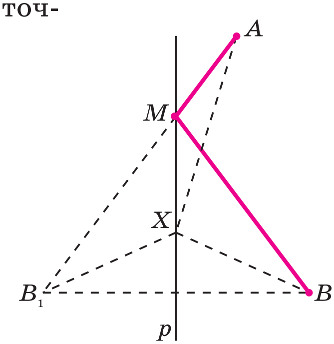


Рис. 375

Но $XB_1 = XB$ и $MB_1 = MB$, поэтому $AX + XB > AM + MB$. Отсюда следует, что M — искомая точка.

Итак, для построения точки M следует построить точку B_1, симметричную точке B относительно прямой p, и построить отрезок AB_1. Этот отрезок пересечёт прямую p в искомой точке M.

Задача 3

Даны два равнобедренных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, основания AB и A_1B_1 которых лежат на одной прямой (рис. 376, *а*). Постройте прямую MN, параллельную основаниям треугольников, так, чтобы отрезки этой прямой, заключённые внутри треугольников, были равны.

Решение

Пусть X и Y — середины оснований треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. При параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{XY}$ треугольник ABC отображается на треугольник $A_2B_2C_2$ (рис. 376, *б*), стороны A_2C_2 и B_2C_2 которого пересекаются со сторонами A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ в точках M и N, которые и определяют искомую прямую.

Заметим, что задача не имеет решения, если один из треугольников $A_1B_1C_1$ или $A_2B_2C_2$ оказался внутри другого.

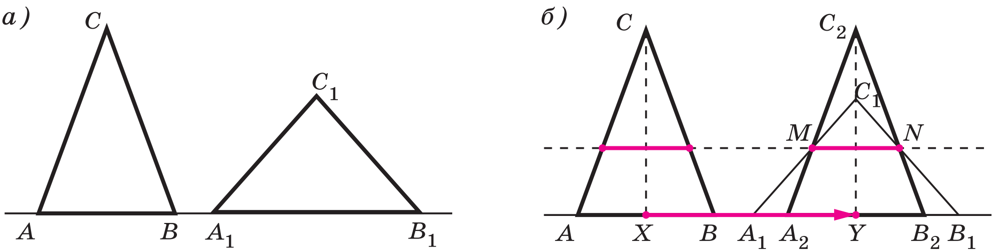


Рис. 376

Задачи

1271 Найдите симметрии а) параллелограмма; б) прямоугольника; в) ромба; г) равнобедренной трапеции.

1272 Сколько осей симметрии имеет правильный n-угольник?

1273 Найдите симметрии а) правильного пятиугольника; б) правильного шестиугольника; в) правильного n-угольника.

1274 Приведите пример многоугольника, не имеющего симметрий.

1275 Докажите, что четырёхугольник, имеющий центр симметрии, является параллелограммом.

1276 Приведите примеры фигур, имеющих бесконечно много центров симметрии.

1277 Существует ли многоугольник, имеющий ровно два центра симметрии? Ответ обоснуйте.

1278 Может ли многоугольник иметь две параллельные оси симметрии? Ответ обоснуйте.

1279 Постройте фигуру, обладающую переносной симметрией, составленную из равных а) прямоугольных треугольников; б) ромбов; в) равнобедренных трапеций.

1280 Постройте фигуру, обладающую поворотной симметрией, составленную из равных а) равносторонних треугольников; б) ромбов.

1281 Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что отрезки прямых, заключённые внутри квадрата, равны.

1282 На прямой a даны три точки A, B и C, причём точка B лежит между точками A и C. По одну сторону от этой прямой построены равносторонние треугольники ABM и BCN. Докажите, что отрезки AN и MC равны, и найдите угол между ними.

1283 Решите предыдущую задачу при условии, что точки A, B и C являются вершинами треугольника, а равносторонние треугольники ABM и BCN построены внешним образом на его сторонах AB и BC.

1284 Постройте квадрат, если даны его центр и прямая, на которой лежит одна из сторон квадрата.

1285 Постройте квадрат, если даны его центр и две точки, лежащие на прямых, содержащих параллельные стороны квадрата.

Вопросы для повторения к главе XIV

1 Объясните, что такое отображение плоскости на себя.

2 Докажите, что осевая симметрия является преобразованием плоскости.

3 Докажите, что центральная симметрия является преобразованием плоскости.

4 Что такое движение плоскости?

5 Докажите, что осевая симметрия является движением.

6 Является ли центральная симметрия движением?

7 Докажите, что при движении отрезок отображается на отрезок.

8 Докажите, что при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

9 Объясните, что такое наложение.

10 Докажите, что при наложении различные точки отображаются в различные точки.

11 Докажите, что наложение является движением плоскости.

12 Докажите, что любое движение является наложением.

13 Верно ли утверждение, что при движении любая фигура отображается на равную ей фигуру?

14 Объясните, какая точка называется неподвижной точкой преобразования.

15 Существуют ли неподвижные точки при осевой симметрии? центральной симметрии?

16 Какое преобразование плоскости называется параллельным переносом на данный вектор?

17 Докажите, что параллельный перенос является движением.

18 Какое отображение плоскости называется поворотом?

19 Докажите, что поворот является движением.

20 Что такое внутренняя симметрия фигуры?

21 Назовите внутренние симметрии равностороннего треугольника, квадрата, окружности.

22 Какая фигура называется полосой? Сколько симметрий имеет полоса?

23 Как называются орнаменты, при построении которых используется переносная симметрия?

24 Как называются орнаменты, при построении которых используется поворотная симметрия?

Дополнительные задачи

1286 Найдите симметрии фигуры F, данной на рисунке 377.

1287 Даны два произвольных луча h и h_1. Можно ли утверждать, что существует движение, при котором луч h отображается на луч h_1?

1288 Даны острый угол ABC и точка D внутри него. Используя осевую симметрию, найдите на сторонах данного угла такие точки E и F, чтобы треугольник DEF имел наименьший периметр.

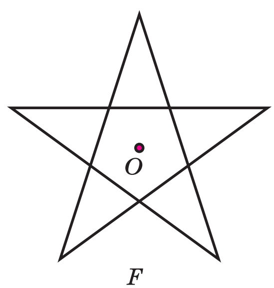


Рис. 377

1289 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 являются соответственно серединами отрезков AM, BM и CM. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$.

Решение

Так как M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $AM = 2MA_1$. Отсюда, учитывая, что точка A_2 — середина отрезка AM, получаем $MA_1 = MA_2$, т. е. точки A_1 и A_2 симметричны относительно точки M. Аналогично точки B_1 и B_2, а также точки C_1 и C_2 симметричны относительно точки M. Рассмотрим центральную симметрию относительно точки M. При этой симметрии точки A_1, B_1, C_1 отображаются в точки A_2, B_2, C_2, поэтому треугольник $A_1B_1C_1$ отображается на треугольник $A_2B_2C_2$, и, следовательно, $\triangle A_2B_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$.

1290 На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены квадраты так, как показано на рисунке 378. Используя параллельный перенос, докажите, что отрезок, соединяющий центры этих квадратов, равен и параллелен стороне AD.

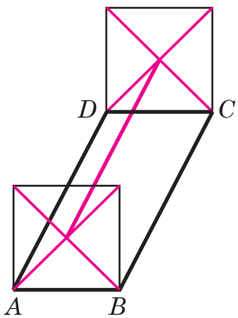


Рис. 378

1291* На стороне AB прямоугольника $ABCD$ построен треугольник ABS так, как показано на рисунке 379: $CC_1 \perp AS$, $DD_1 \perp BS$. Используя параллельный перенос, докажите, что прямые SK и AB взаимно перпендикулярны.

1292 В окружность с центром O вписаны два равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, причём вершины обозначены так, что направление обхода по дуге ABC от точки A к точке C совпадает с направлением обхода по дуге $A_1B_1C_1$ от точки A_1 к точке C_1. Используя поворот вокруг точки O, докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 либо проходят через точку O, либо, пересекаясь, образуют равносторонний треугольник.

1293 Даны две пересекающиеся прямые и точка O, не лежащая ни на одной из них. Используя центральную симметрию, постройте прямую, проходящую через точку O, так, чтобы отрезок этой прямой, отсекаемый данными прямыми, делился точкой O пополам.

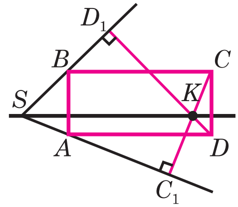


Рис. 379

1294 Используя параллельный перенос, постройте трапецию по её основаниям и диагоналям.

1295 Даны параллельные прямые b и c и точка A, не лежащая ни на одной из них. Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы вершины B и C лежали соответственно на прямых b и c. Сколько решений имеет задача?

Решение

Допустим, что задача решена и искомый треугольник ABC построен (рис. 380, *а*). При повороте плоскости вокруг точки A на 60° по часовой стрелке вершина B отображается в вершину C, поэтому прямая b отображается на прямую b_1, проходящую через точку C. Прямую b_1 легко построить, не пользуясь точками B и C (см. задачу **1268**). Построив прямую b_1, находим точку C, в которой прямая b_1 пересекается с прямой c. Затем, построив окружность с центром A радиуса AC, находим точку B. На рисунке 380, *а* выполнено построение.

Задача имеет два решения, одно из которых получается при повороте плоскости вокруг точки A на 60° по часовой стрелке ($\triangle ABC$ на рисунке 380, *а*), а другое — при повороте плоскости на угол 60° против часовой стрелки ($\triangle AB'C'$ на рисунке 380, *б*).

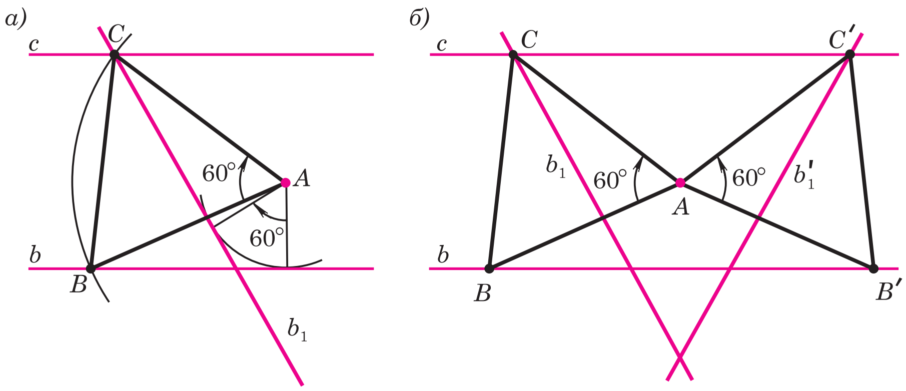
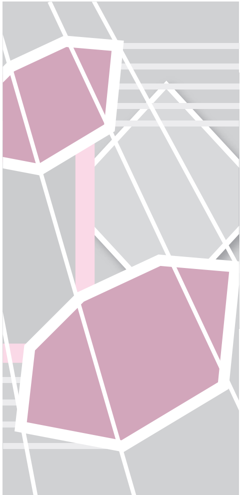


Рис. 380



Глава XV

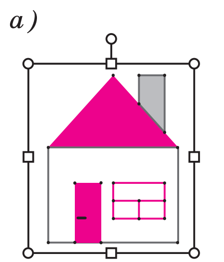
Преобразование подобия. Подобие фигур

В этой главе мы продолжим изучать преобразования плоскости. Но теперь нас будут интересовать те преобразования, которые могут изменять линейные размеры фигуры. В главе определяется понятие подобных многоугольников и доказываются теоремы об их периметрах и площадях. После этого указывается один из способов построения подобных многоугольников — гомотетия (центральное подобие). В заключение главы вводится понятие подобия фигур произвольного вида и рассматривается применение подобия, в частности гомотетии, к доказательству теорем и решению задач.

§1 Подобие многоугольников

130. Представление о подобных фигурах

При работе на компьютере нам приходится обращаться с какими-либо графическими объектами — фотографиями, рисунками, схемами, чертежами. После вставки в документ графический объект имеет свою границу — рамку, на которой расположены направляющие по контуру (кружочки или квадратики), с помощью которых можно изменять размеры объекта (рис. 381, *а*). Для изменения размеров объекта курсор мыши помещают в одну из меток и при появлении двойной



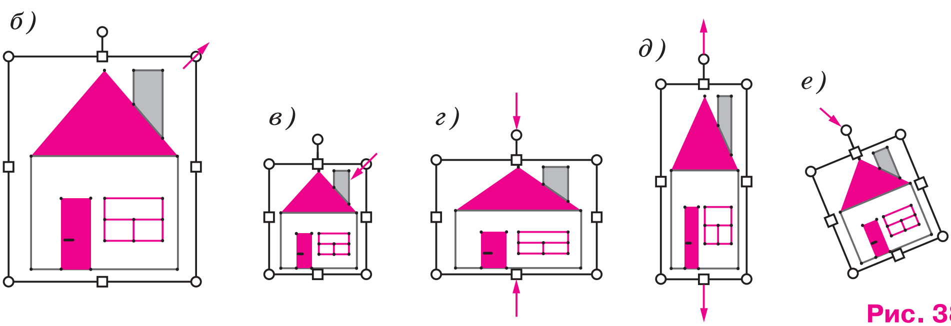
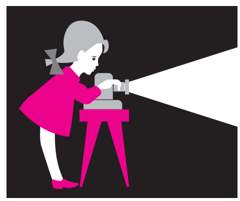


Рис. 381

стрелки перетаскивают границу в нужном направлении. При этом пропорции изображения (отношение ширины к высоте) могут быть сохранены или нарушены. Если выбрана одна из угловых меток на рамке, то объект можно уменьшить или увеличить, сохраняя пропорции (рис. 381, *б, в*). Если выбрана одна из меток на сторонах рамки, то объект можно растянуть или сжать, нарушив пропорции (рис. 381, *г*, *д*). Изменив размеры, объект можно повернуть, для этого используется метка над рамкой (рис. 381, *е*).

Преобразование объекта, сохраняющее пропорции, даёт представление о **подобных фигурах**: точкам одной фигуры сопоставляются точки другой фигуры так, что расстояния между соответственными точками этих фигур изменяются в одно и то же число раз. На рисунках 381, *б*, *в*, *е* пропорции исходного изображения (см. рис. 381, *а*) сохранены, поэтому эти фигуры являются подобными.

Примером сопоставления точек подобных фигур является проецирование киноленты на экран с помощью кинопроектора: каждой точке изображения на кинокадре сопоставляется точка на экране, причём все расстояния увеличиваются в одинаковое число раз.



131. Подобные многоугольники

В этой главе под термином «многоугольник» будем понимать только выпуклый многоугольник (п. 46).

Многоугольники называются **одноимёнными**, если они имеют одинаковое число углов, а следовательно, и сторон.

Пусть $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ — два одноимённых выпуклых многоугольника, причём углы одного многоугольника соответственно равны углам другого: $\angle B_1 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle A_2$, ... , $\angle B_n = \angle A_n$. В этом случае стороны

B_1B_2 и A_1A_2, B_2B_3 и A_2A_3 и т. д. будем называть **сходственными сторонами.** На рисунке 382 изображены два четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$, причём $\angle B_1 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle A_2$, $\angle B_3 = \angle A_3$, $\angle B_4 = \angle A_4$. Сходственными являются стороны B_1B_2 и A_1A_2, B_2B_3 и A_2A_3, B_3B_4 и A_3A_4, B_4B_1 и A_4A_1.

Напомним, что отношением отрезков AB и A_1B_1 называется отношение их длин, т. е. $\frac{AB}{A_1B_1}$. Отрезки A_1B_1 и C_1D_1 пропорциональны отрезкам AB и CD, если $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD}$. При этом, если $\frac{A_1B_1}{AB} = k$, то будем писать $A_1B_1 = kAB$.

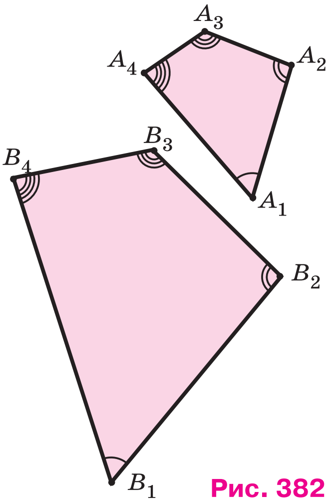


Рис. 382

Многоугольник F_1 называется подобным одноимённому многоугольнику F, если углы многоугольника F_1 соответственно равны углам многоугольника F, а их сходственные стороны пропорциональны.

Число k, равное отношению сходственных сторон многоугольников F_1 и F, называется **коэффициентом подобия** многоугольника F_1 относительно многоугольника F или, коротко, коэффициентом подобия многоугольников F_1 и F. Так как отношение длин отрезков — положительное число, то $k > 0$.

Если многоугольник F_1 подобен многоугольнику F, то пишут: $F_1 \sim F$ или $F_1 \overset{k}{\sim} F$, где k — коэффициент подобия F_1 относительно F. Ясно, что если $F_1 \sim F$ с коэффициентом k, то $F \sim F_1$ с коэффициентом $\frac{1}{k}$ (объясните почему). На рисунке 382 $B_1B_2B_3B_4 \sim A_1A_2A_3A_4$, где

$$k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{B_2B_3}{A_2A_3} = \frac{B_3B_4}{A_3A_4} = \frac{B_4B_1}{A_4A_1} = 2.$$

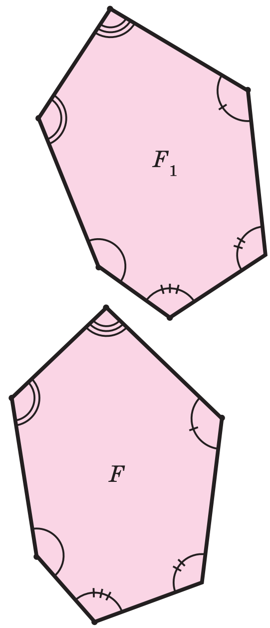
Заметим, что понятие подобия треугольников, введённое в 8 классе (п. 64), является частным случаем подобия многоугольников.

Если два многоугольника равны, то очевидно, что их углы соответственно равны и сходственные стороны равны. Поэтому **два равных многоугольника подобны с коэффициентом $k = 1$.** Справедливо и обратное утверждение, которое мы примем без доказательства.

Теорема

Если два многоугольника подобны и коэффициент подобия равен единице, то такие многоугольники равны.

Другими словами, теорема утверждает, что если у двух одноимённых многоугольников углы соответственно равны и сходственные стороны равны, то такие многоугольники равны (рис. 383).



Если $F_1 \overset{1}{\sim} F$, то $F_1 = F$

Рис. 383

Замечание

Из курса геометрии 8 класса мы знаем, что два треугольника подобны, если углы одного треугольника соответственно равны углам другого, или если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого. Для произвольных многоугольников аналогичные свойства не верны. Например, прямоугольник и квадрат, изображённые на рисунке 384, *а*, не подобны, хотя углы их соответственно равны; квадрат и ромб, изображённые на рисунке 384, *б*, также не являются подобными, хотя и имеют пропорциональные стороны.

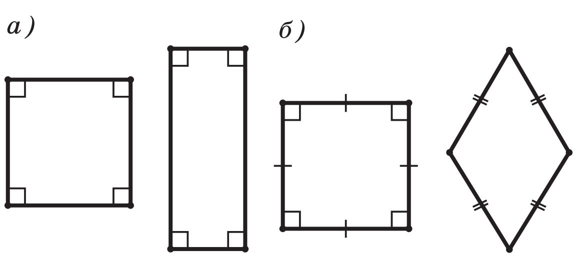


Рис. 384

132. Теоремы о периметрах и площадях подобных многоугольников

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Теорема

Отношение периметров двух подобных многоугольников равно коэффициенту подобия многоугольников.

Доказательство

Пусть $A_1A_2...A_n \sim B_1B_2...B_n$ с коэффициентом k. Тогда $A_1A_2 = kB_1B_2$, $A_2A_3 = kB_2B_3$, ..., $A_nA_1 = kB_nB_1$.

Пользуясь этими равенствами, найдём отношение периметров данных многоугольников:

$$\frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_nA_1}{B_1B_2 + B_2B_3 + \ldots + B_nB_1} = \frac{k(B_1B_2 + B_2B_3 + \ldots + B_nB_1)}{B_1B_2 + B_2B_3 + \ldots + B_nB_1} = k.$$

Теорема доказана.

Докажем теперь теорему о площадях подобных фигур.

Теорема

Отношение площадей двух подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство

Поскольку ход рассуждений не зависит от числа сторон этих многоугольников, рассмотрим для определённости случай, когда $n = 5$. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5 \sim B_1B_2B_3B_4B_5$ с коэффициентом k (рис. 385). По определению подобных многоугольников $A_1A_2 = kB_1B_2$, $A_2A_3 = kB_2B_3$, $A_3A_4 = kB_3B_4$, $A_4A_5 = kB_4B_5$, $A_5A_1 = kB_5B_1$. Разобьём многоугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ на треугольники $\triangle_1^*$, $\triangle_2^*$, $\triangle_3^*$, а многоугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ на треугольники $\triangle_1$, $\triangle_2$ и $\triangle_3$, как показано на рисунке 385.

Пользуясь вторым признаком подобия треугольников, нетрудно доказать, что $\triangle_1^* \overset{k}{\sim} \triangle_1$, $\triangle_2^* \overset{k}{\sim} \triangle_2$, $\triangle_3^* \overset{k}{\sim} \triangle_3$.

Действительно, $\triangle_1^* \sim \triangle_1$ с коэффициентом k, так как $\angle A_1 = \angle B_1$,

$$k = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}.$$

Далее: $\triangle_2^* \overset{k}{\sim} \triangle_2$, так как $\angle A_1A_3A_4 = \angle B_1B_3B_4$ (объясните почему),

$$\frac{A_1A_3}{B_1B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = k.$$

Так же доказывается, что $\triangle_3^* \overset{k}{\sim} \triangle_3$.

Согласно теореме о площадях подобных треугольников, доказанной в п. 65:

$$S_{\triangle_1^*} = k^2 S_{\triangle_1},\quad S_{\triangle_2^*} = k^2 S_{\triangle_2},\quad S_{\triangle_3^*} = k^2 S_{\triangle_3}.$$

Складывая эти три равенства, получим:

$$S_{\triangle_1^*} + S_{\triangle_2^*} + S_{\triangle_3^*} = k^2(S_{\triangle_1} + S_{\triangle_2} + S_{\triangle_3}).$$

Учитывая известное свойство площадей (п. 54), получим:

$$S_{A_1A_2A_3A_4A_5} = k^2 S_{B_1B_2B_3B_4B_5} \text{ или}$$

$$\frac{S_{A_1A_2A_3A_4A_5}}{S_{B_1B_2B_3B_4B_5}} = k^2.$$

Теорема доказана.

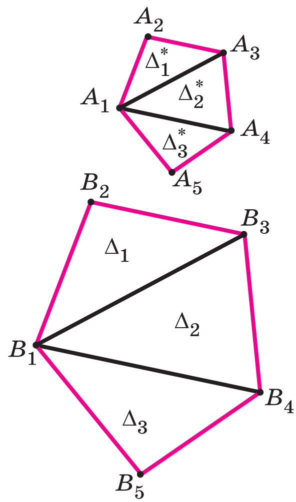


Рис. 385

Задачи

1296 Шестиугольники $ABCDEF$ и $GHKLMN$, изображённые на рисунке 386, равны. Назовите их соответственные углы и сходственные стороны.

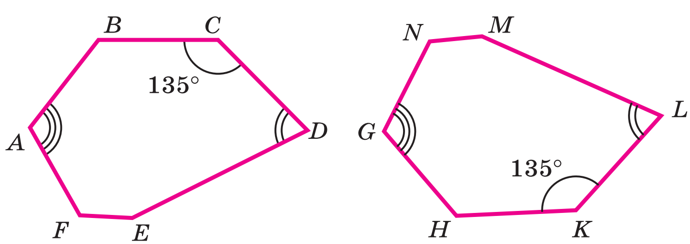


Рис. 386

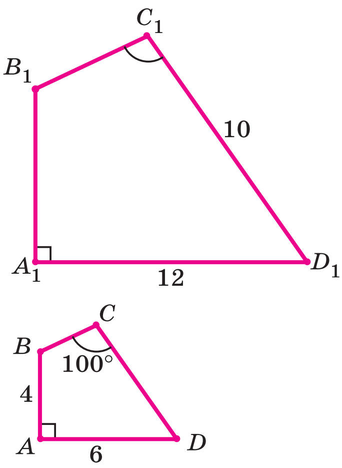


Рис. 387

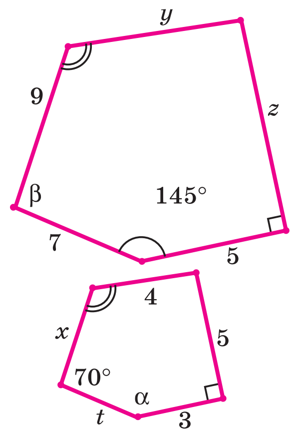


Рис. 388

1297 Докажите, что если для прямоугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ выполняются равенства $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, то прямоугольники равны.

1298 Верны ли утверждения: а) если стороны двух треугольников соответственно равны, то треугольники равны; б) если у двух выпуклых многоугольников стороны соответственно равны, то многоугольники равны? Ответ обоснуйте.

1299 Четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, изображённые на рисунке 387, подобны. По данным рисунка найдите: а) коэффициент подобия; б) $\angle A_1$, $\angle C_1$; в) A_1B_1, CD.

1300 Пятиугольники, изображённые на рисунке 388, подобны. По данным этого рисунка найдите x, y, z, t, α, β.

1301 По данным рисунка 389, *а–в* выясните, подобны ли многоугольники F и F_1, P и P_1, R и R_1.

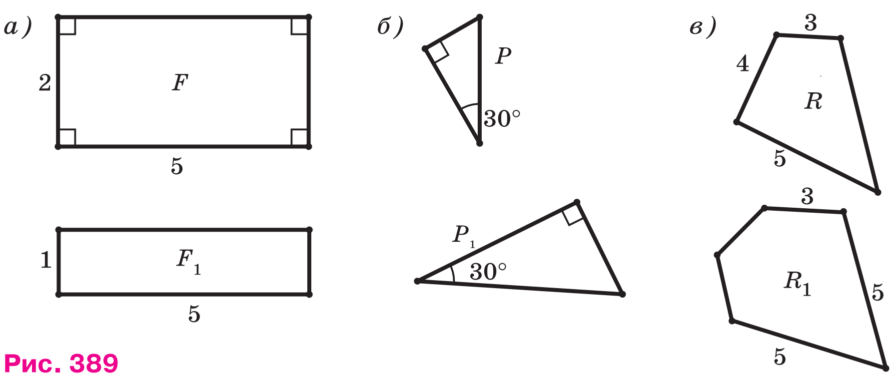


Рис. 389

1302 Подобны ли многоугольники, изображённые на рисунке 390? Ответ обоснуйте.

1303 Могут ли быть подобными многоугольники F и F_1, если: а) F — остроугольный, а F_1 — тупоугольный треугольники; б) F — равносторонний треугольник, а F_1 — равнобедренный, но не равносторонний треугольник; в) F — прямоугольник, а F_1 — квадрат; г) F и F_1 — прямоугольники; д) F и F_1 — пятиугольники; е) F — шестиугольник, а F_1 — пятиугольник. Ответ обоснуйте.

1304 Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Длины сторон BC и B_1C_1 соответственно равны 1,4 м и 56 см. Найдите отношение периметров треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

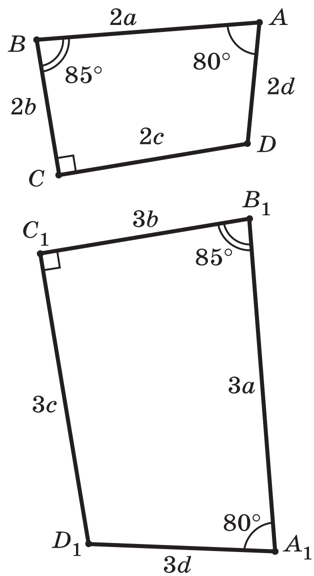


Рис. 390

1305 Периметр четырёхугольника $MNPQ$ относится к периметру подобного ему четырёхугольника $M_1N_1P_1Q_1$ как 3 : 5. Длина стороны $MN = 7$ см, а длина P_1Q_1 на 5 см больше длины стороны M_1N_1. Найдите длину стороны PQ.

1306 Многоугольники F_1 и F_2 подобны. Пусть S_1 и S_2 — их площади, а k — коэффициент подобия многоугольника F_1 относительно F_2. Используя теорему о площадях подобных многоугольников, заполните таблицу.

S_1	27 см²	640 см²		24 см²	
S_2	3 см²		54 дм²	6 мм²	$4a^2$ см²
k		2	$\frac{2}{3}$		$\sqrt{a}$

1307 Длина стороны квадрата F равна a. Построен многоугольник F_1, подобный многоугольнику F. а) Докажите, что многоугольник F — квадрат. б) Найдите площадь многоугольника F_1, если коэффициент подобия многоугольников F и F_1 равен k.

1308 Площади подобных многоугольников равны 75 м² и 300 м². Одна из сторон второго многоугольника имеет длину 9 м. Найдите длину сходственной стороны первого многоугольника.

§2 Преобразование подобия

133. Гомотетия

Отметим на плоскости некоторую точку O и возьмём любое число k, отличное от нуля. Каждой точке M плоскости, отличной от точки O, поставим в соответствие точку M_1 по следующему правилу:

1) точка M_1 лежит на луче OM, если $k > 0$ (рис. 391, *а*), и точка M_1 лежит на продолжении луча OM, если $k < 0$;

2) $OM_1 = |k|\,OM$ (рис. 391, *б*).

Будем считать, что точка O соответствует сама себе.

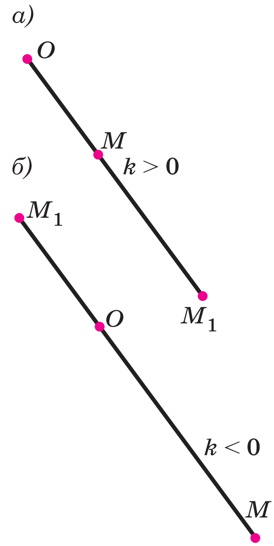


Рис. 391

Замечание

Указанное правило можно коротко записать с помощью векторов в виде следующего равенства: $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ (объясните почему).

При заданном соответствии каждая точка плоскости оказывается сопоставленной некоторой единственной точке.

Такое соответствие определяет преобразование плоскости, которое называется **гомотетией** или **центральным подобием**. Число k называется **коэффициентом гомотетии**, а точка O — **центром гомотетии**. Центр гомотетии является неподвижной точкой.

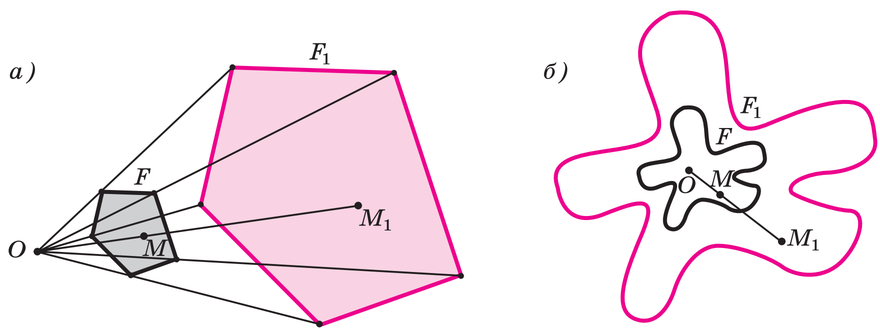


Рис. 392

Соответственные при гомотетии фигуры F_1 и F называют **гомотетичными.**

На рисунке 392, *а*, *б* изображены гомотетичные фигуры F_1 и F с центром гомотетии в точке O и коэффициентом $k = 3$. На рисунке 393, *а*, *б* изображены гомотетичные фигуры F_1 и F с центром гомотетии в точке O и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$.

Если коэффициент гомотетии равен единице, то все точки плоскости, а значит, и любой фигуры F остаются неподвижными, т. е. фигура переходит сама в себя. Если $k = -1$, то каждая точка фигуры F переходит в симметричную ей точку относительно центра O, поэтому фигура F_1 получается центральной симметрией из фигуры F (рис. 394). Другими словами, центральная симметрия является частным случаем гомотетии (когда коэффициент гомотетии равен -1).

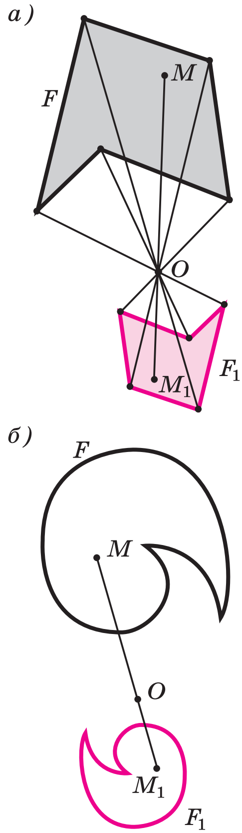


Рис. 393

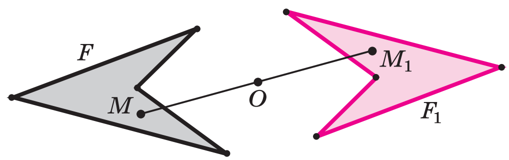


Рис. 394

134. Свойства гомотетии

Сформулируем три основных свойства гомотетии.

1°. При гомотетии с коэффициентом, отличным от единицы, прямая, проходящая через центр гомотетии, переходит в себя, а прямая, не проходящая через центр гомотетии, — в параллельную ей прямую (рис. 395, *а*, *б*).

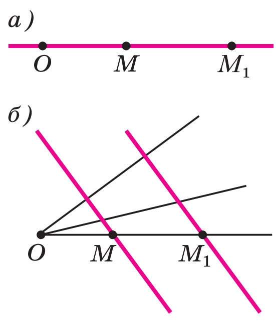


Рис. 395

2°. Если при гомотетии с коэффициентом k концы отрезка AB переходят в точки A_1 и B_1, то

отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, причём $A_1B_1 = |k|\ AB$ (рис. 396).

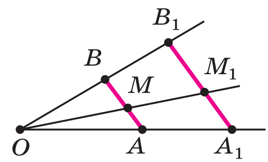


Рис. 396

3^0. При гомотетии с коэффициентом k окружность с центром C и радиусом r переходит в окружность с центром C_1 и радиусом $|k|r$, где C_1 — точка, в которую переходит точка C.

Докажите эти свойства самостоятельно.

Из свойств 1^0 и 2^0 следует, что при гомотетии **луч переходит в луч, полуплоскость — в полуплоскость, угол — в равный ему угол.**

Используя перечисленные свойства, докажем теорему о гомотетичных многоугольниках.

Теорема

При гомотетии с коэффициентом k многоугольник переходит в подобный ему многоугольник, причём коэффициент подобия многоугольников равен $|k|$.

Доказательство

Пусть $A_1A_2...A_n$ — произвольный многоугольник. Из свойства 2^0 следует, что при гомотетии с коэффициентом k многоугольник $A_1A_2...A_n$ переходит в многоугольник $B_1B_2...B_n$, причём $B_1B_2 = |k|\ A_1A_2$, $B_2B_3 = |k|\ A_2A_3$, ..., $B_nB_1 = |k|\ A_nA_1$ (рис. 397 для случая, когда $n = 4$).

При гомотетии угол переходит в равный ему угол, поэтому

$\angle B_1 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle A_2$, ..., $\angle B_n = \angle A_n$.

Из полученных равенств заключаем, что $B_1B_2...B_n \overset{k}{\backsim} A_1A_2...A_n$. **Теорема доказана.**

135. Подобие произвольных фигур

Введём теперь понятие подобия произвольных фигур.

Фигура F_1 называется подобной фигуре F, если она равна некоторой фигуре F^*, гомотетичной фигуре F (рис. 398).

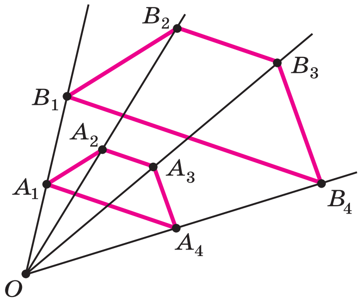


Рис. 397

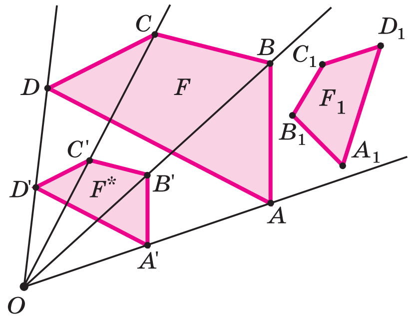


Рис. 398

Если k — коэффициент гомотетии фигур F^* и F, то положительное число $|k|$ называется **коэффициентом подобия** фигуры F_1 относительно фигуры F (или, коротко, **коэффициентом подобия** фигур F_1 и F).

Если фигура F_1 подобна фигуре F, то пишут: $F_1 \sim F$ с коэффициентом k или $F_1 \overset{k}{\sim} F$, где k — коэффициент подобия.

Подобие фигур обладает следующими свойствами:

а) если $F_1 \overset{k}{\sim} F$, то $F \overset{\frac{1}{k}}{\sim} F_1$;

б) если $F_2 \overset{n}{\sim} F_1$ и $F_1 \overset{k}{\sim} F$, то $F_2 \overset{nk}{\sim} F$ (рис. 399).

Докажите эти свойства самостоятельно.

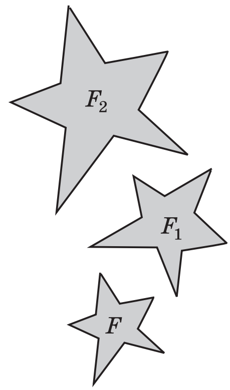


Рис. 399

Из определения подобия фигур следует, что если фигура F_1 гомотетична фигуре F с коэффициентом k, то $F_1 \overset{k}{\sim} F$ с коэффициентом $|k|$. Таким образом, гомотетичные фигуры представляют собой частный случай подобных фигур.

Пользуясь свойствами гомотетии (п. 134), а также свойствами равенства фигур, можно доказать, что **фигурой, подобной прямой (отрезку, лучу, полуплоскости), является прямая (отрезок, луч, полуплоскость). Фигурой, подобной углу, является угол, равный данному.** Из свойства 3^0, п. 134 также следует, что **фигурой, подобной окружности, является окружность.**

Примером подобных фигур произвольной формы являются схемы планировки одной и той

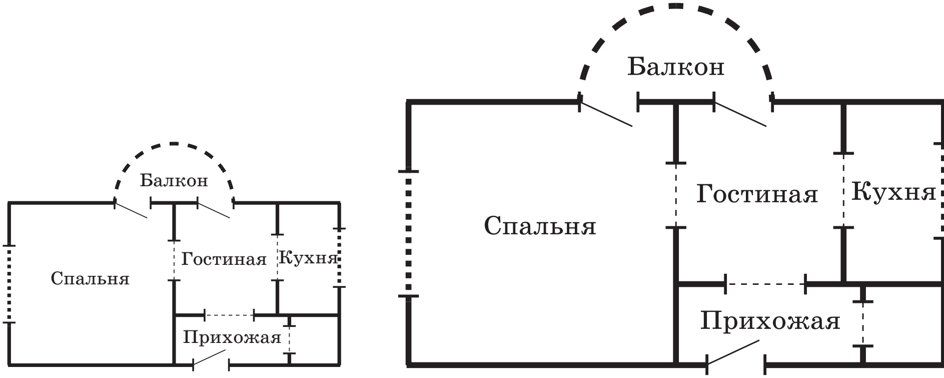


Рис. 400

же квартиры, выполненные для рекламного буклета и для стенда на выставке (рис. 400).

Замечание

Из теоремы п. 134 следует, что если многоугольники подобны согласно общему определению подобия фигур, то они подобны и по определению, данному в п. 131. Справедливо и обратное: если многоугольники подобны по определению п. 131, то они подобны и по общему определению.

Задачи

1309 Отметьте пять точек и обозначьте их буквами O, A, B, C, D. а) Постройте точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, чтобы при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом 2 точки A, B, C и D перешли соответственно в точки A_1, B_1, C_1 и D_1; б) выполните предыдущее задание для гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $k = -3$.

1310 Отметьте четыре точки: O, A_1, B_1, C_1. а) Постройте точки A_1, B_1, C так, чтобы при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $k = 3$ точки A, B и C перешли соответственно в точки A_1, B_1, C_1; б) выполните предыдущее задание для гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k, равным -2; 1 и $\frac{1}{3}$.

1311 Отметьте точку O и начертите прямую l так, чтобы $O \notin l$. Постройте прямую, в которую переходит прямая l при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k, если: а) $k = 2$; б) $k = -0{,}5$; в) $k = -3$; г) $k = 3$.

1312 Отметьте точку O и начертите окружность произвольного радиуса r с центром в точке C, отличной от точки O. Постройте окружность, в которую переходит данная окружность при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k, если: а) $k=-1$; б) $k=1,5$; в) $k=3$.

1313 Перечертите рисунок 401, *а–г* в тетрадь и постройте треугольники, в которые переходят данные треугольники, при гомотетии с данным центром и коэффициентом: а) $\triangle ABC$, центр гомотетии O, $k=3$; б) $\triangle XYZ$, центр гомотетии Z, $k=\frac{1}{2}$; в) $\triangle PQR$, центр гомотетии P, $k=-2$; г) $\triangle LMN$, центр гомотетии E — середина отрезка LM, $k=-\frac{1}{2}$.

1314 Перечертите фигуры, изображённые на рисунках 402, *а–г*, в тетрадь и постройте фигуры, в которые они переходят при гомотетии с центром в точке A и $k=2$.

1315 Докажите, что при гомотетии угол переходит в равный ему угол.

1316 Докажите, что каждая фигура подобна себе самой.

1317 Докажите, что если $F_1 \sim F$ с коэффициентом k, то $F \sim F_1$ с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

1318 Докажите, что если фигура F_2 подобна F_1, а фигура F_1 подобна фигуре F, то фигура F_2 подобна фигуре F.

1319 Пусть при гомотетии с $k=-3$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$, а параллелограмм $MNPQ$ — в параллелограмм $M_1N_1P_1Q_1$. Можно ли утверждать, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и $MNPQ \sim M_1N_1P_1Q_1$? При утвердительном ответе найдите коэффициент подобия.

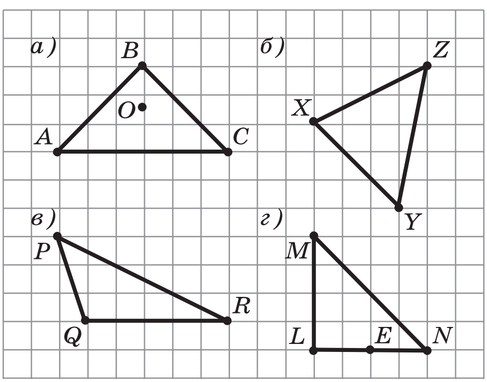


Рис. 401

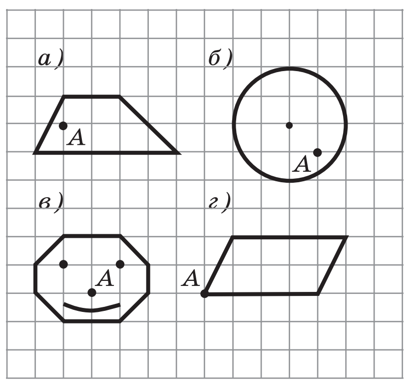


Рис. 402

1320 Выясните, что представляет собой фигура F_1, подобная фигуре F, если F является: а) трапецией; б) парой пересекающихся под углом 30° прямых.

1321 Гомотетия задана центром O и двумя соответственными точками A и A_1. Для данной точки M постройте соответственную ей при заданной гомотетии точку M_1 (рис. 403, *а*).

Решение

Пусть точка M не лежит на прямой AA_1. По определению гомотетии точка M_1 лежит на прямой OM. Для построения точки M_1 на этой прямой заметим, что, согласно свойству 1^0, прямая AM переходит в параллельную ей прямую A_1M_1. Поэтому если через точку A_1 проведём прямую, параллельную прямой AM, то она пересечёт прямую OM в искомой точке M_1 (рис. 403, *б*). Если точка M лежит на прямой AA_1, то отметим произвольную точку B, не лежащую на прямой OA, и построим указанным выше способом гомотетичную ей точку B_1. Затем, пользуясь точками B и B_1, построим точку M_1 (рис. 403, *в*).

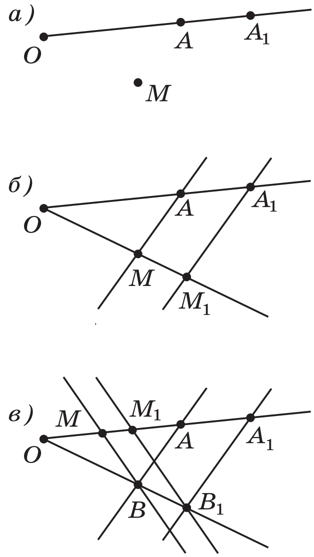


Рис. 403

1322 Начертите параллелограмм $ABCD$ отметьте на плоскости точки O и A_1 так, чтобы A_1, O и A лежали на одной прямой. Рассмотрите гомотетию с центром в точке O, при котором точка A переходит в точку A_1. Используя свойства гомотетии, постройте параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$, в который переходит параллелограмм $ABCD$ при заданной гомотетии.

1323 Гомотетия задана центром O и двумя соответственными точками A и A_1. Для данной окружности, проходящей через точку A, постройте соответствующую ей при заданной гомотетии окружность (рис. 404, *а*).

Решение

Пусть C — центр данной окружности радиуса r, а C_1 — центр искомой окружности радиуса r_1. Согласно свойству 3^0 п. 134 точки C и C_1 — соответственные точки при заданной гомотетии с

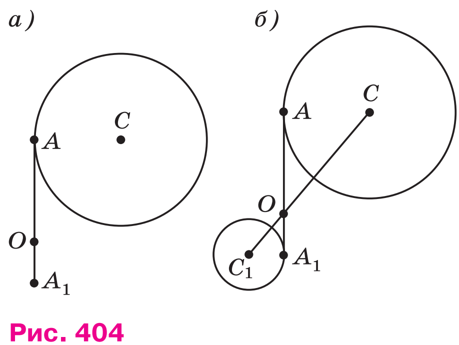


Рис. 404

центром O, поэтому, пользуясь данными точками A и A_1, легко построить точку C_1 (см. задачу **1321**). Окружность, гомотетичная данной окружности, проходит через точку A_1 (объясните почему), поэтому искомой будет окружность с центром C_1 и радиусом C_1A_1 (рис. 404, *б*).

1324 Начертите окружность с центром C и произвольным радиусом r и постройте фигуру, в которую переходит эта окружность при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k, если: а) O принадлежит данной окружности, $k=\frac{1}{2}$; б) O принадлежит данной окружности, $k=-\frac{1}{2}$; в) O не принадлежит данной окружности, $k=3$.

§3 Применение подобия фигур к доказательству теорем и решению задач

Подобие и его частный случай — гомотетия — часто используются для доказательства теорем и решения задач. В таких теоремах и задачах, как правило, речь идёт об отношении длин соответственных отрезков в подобных (в частности, гомотетичных) фигурах. Равенство отношений длин отрезков может быть заменено равенством произведений в соответствии с основным свойством пропорции: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$.

136. Применение подобия к доказательству теорем

Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Отрезки MA и MB, а также отрезки MC и MD называются **отрезками пересекающихся хорд** AB и CD соответственно (рис. 405).

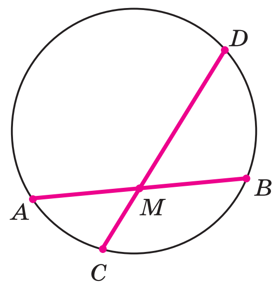


Рис. 405

Докажем теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности.

Теорема

Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Доказательство

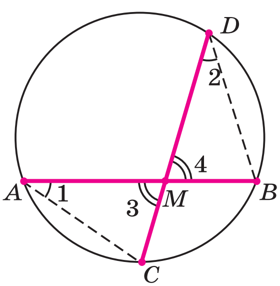
Пусть хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 406). Докажем, что $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Рассмотрим треугольники AMC и DMB и докажем, что они подобны. Действительно, углы 1 и 2 равны, так как они вписанные в окружность и опираются на одну и ту же дугу. Углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия треугольников $\triangle AMC \sim \triangle DMB$. Отсюда следует, что $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$, или $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Теорема доказана.

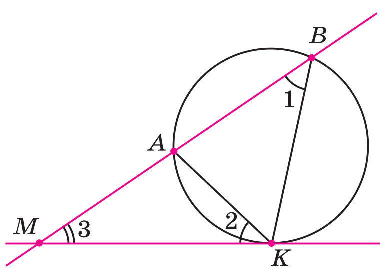
Пусть через точку M, лежащую вне окружности, проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B. Отрезок AB является хордой окружности. Отрезки MA и MB называют **отрезками секущей.** Если через точку M проведена касательная MK к окружности (K — точка касания), то отрезок MK называют **отрезком касательной** (рис. 407).

Докажем теорему о квадрате отрезка касательной к окружности.



$MA \cdot MB = MC \cdot MD$

Рис. 406



$MK^2 = MA \cdot MB$

Рис. 407

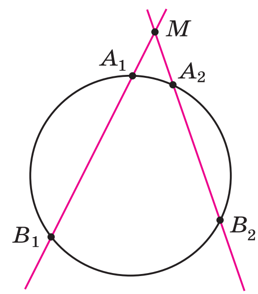
Теорема

Если через внешнюю точку к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей.

Доказательство

Рассмотрим треугольники MKA и MBK (см. рис. 407) и докажем, что они подобны. Действительно, углы 1 и 2 равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги AK ($\angle 1$ — вписанный в окружность и опирающийся на дугу AK, а $\angle 2$ — угол между касательной к окружности и хордой). Угол 3 — общий угол этих треугольников. По первому признаку подобия треугольников $\triangle MKA \sim \triangle MBK$. Отсюда следует, что $\frac{MK}{MB} = \frac{MA}{MK}$, или $MK^2 = MA \cdot MB$.

Теорема доказана.



$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2$

Рис. 408

Следствием доказанной теоремы является теорема о произведении отрезков секущих.

Теорема

Если через точку M, лежащую вне окружности, проведены две секущие, то произведение отрезков одной секущей равно произведению отрезков другой секущей (рис. 408).

Докажите эту теорему самостоятельно.

137. Применение подобия к решению задач

Задача 1

Докажите, что множество середин всех хорд окружности с центром C и радиусом r, один конец которых совпадает с данной точкой A этой окружности, есть окружность, построенная на отрезке AC как на диаметре (рис. 409).

Решение

При гомотетии с центром в точке A и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$ любая точка X окружности с центром C и радиусом r перейдёт в точку X_1 — середину хорды AX. По свойству 3^0 п. 134 при указанной гомотетии окружность с центром C и радиусом r переходит в окружность с центром C_1 в середине отрезка AC и радиусом $r_1 = \frac{1}{2}r$. Эта окружность и является искомым множеством точек (см. рис. 409).

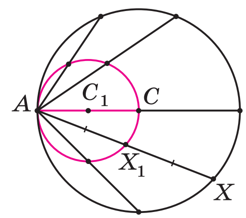


Рис. 409

Рассмотрим теперь пример задачи на построение, при решении которой удобно применять гомотетию. Отметим общий подход к решению таких задач: сначала строят фигуру, удовлетворяющую только части требований, а затем эту фигуру с помощью подобия (гомотетии) преобразуют в искомую фигуру, для которой выполнены уже все требования.

Задача 2

Даны угол hk и точка A внутренней области этого угла. Постройте окружность, проходящую через точку A и касающуюся сторон угла.

Решение

Пусть O — вершина угла hk, A — данная точка (рис. 410, *а*). Допустим, что задача решена и F — искомая окружность. При гомотетии с центром в точке O и любым коэффициентом $k > 0$ окружность F перейдёт в окружность F_1, которая, очевидно, будет касаться сторон угла hk. Точка A перейдёт в одну из точек пересечения луча OA с окружностью F_1: A_1 или A_2 (на рисунке 410, *а* точка A переходит в точку A_1). Ясно, что при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $\frac{1}{k}$ окружность F_1 перейдёт в окружность F. Отсюда вытекает следующий способ решения задачи.

Строим произвольную окружность F_1, касающуюся сторон угла hk, и находим точки A_1

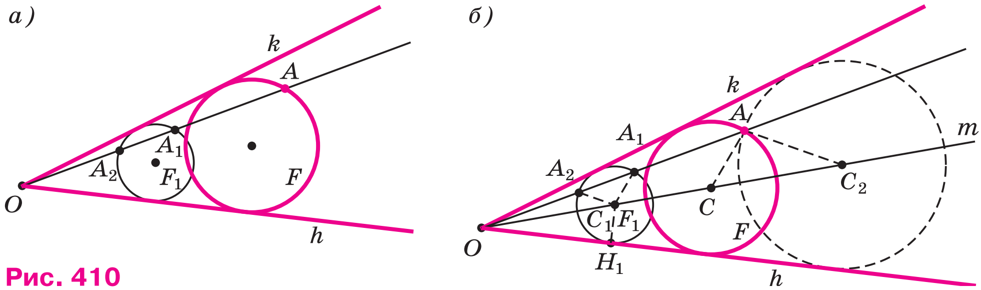


Рис. 410

и A_2 пересечения луча OA с этой окружностью. Далее строим окружность F, в которую переходит окружность F_1 при гомотетии с центром в точке O, переводящей одну из точек A_1 или A_2 в точку A (см. задачу **1323**). Окружность F – искомая. Построение выполнено на рисунке 410, *б*. На этом рисунке m — биссектриса угла hk, C_1 — произвольная её точка, $C_1H_1 \perp h$ и $AC \parallel A_1C_1$.

Задача всегда имеет два решения, так как можно рассматривать две гомотетии: одну, при которой точка A_1 переходит в точку A, другую — при которой точка A_2 переходит в точку A. На рисунке 410, *б* второе решение изображено штриховой линией.

Задачи

1325 Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите ED, если: а) $AE = 5$, $BE = 2$, $CE = 2{,}5$; б) $AE = 16$, $BE = 9$, $CE = ED$; в) $AE = 0{,}2$, $BE = 0{,}5$, $CE = 0{,}4$.

1326 Диаметр AA_1 окружности перпендикулярен к хорде BB_1 и пересекает её в точке C. Найдите BB_1, если $AC = 4$ см, $CA_1 = 8$ см.

1327 Пользуясь теорией об отрезках пересекающихся хорд, докажите, что перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки окружности к диаметру, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые основание перпендикуляра делит диаметр.

1328 В треугольнике ABC сторона AB равна 6, а медиана, проведённая к этой стороне, равна 4. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку C и касается AB, причём одна касается в точке A, а другая — в точке B.

1329 Через точку A проведены касательная AB (B — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках C и D. Найдите CD, если: а) $AB = 4$ см, $AC = 2$ см; б) $AB = 5$ см, $AD = 10$ см.

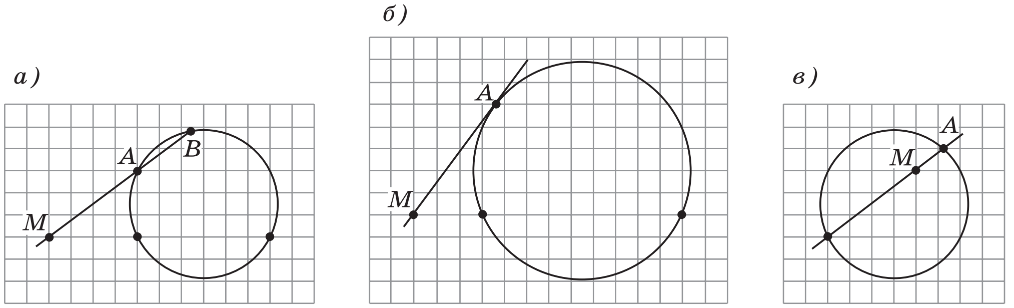


Рис. 411

1330 Через точку M — внешнюю относительно окружности с центром O и радиусом R, проведена секущая, пересекающая окружность в точках A и B. Докажите, что $MA \cdot MB = MO^2 - R^2$.

1331 Через точку M — внутреннюю относительно окружности с центром O и радиусом R, проходит хорда AB. Докажите, что $MA \cdot MB = R^2 - MO^2$.

1332 Две окружности пересекаются в точках A и B. На прямой AB взята точка K — внешняя относительно данных окружностей. Через точку K проведены две секущие m и l так, что m пересекает одну окружность в точках C и D, а l пересекает другую окружность в точках E и F. Докажите, что $KC \cdot KD = KE \cdot KF$.

1333 На клетчатой бумаге с клетками 1×1 см изображены окружности и связанные с ними хорды, секущие или касательные (рис. 411). Найдите: а) длины отрезка MA секущей и хорды AB (рис. 411, *а*); б) длину отрезка касательной AM (рис. 411, *б*); в) длину отрезка AM хорды (рис. 411, *в*).

1334 В остроугольный треугольник ABC впишите квадрат $PQRS$ так, чтобы вершины P и Q принадлежали стороне AC, а вершины P и S — соответственно сторонам BC и BA (рис. 412).

1335 В треугольник ABC впишите прямоугольник $PQRS$, подобный прямоугольнику $P_1Q_1R_1S_1$, так, чтобы вершины P и Q принадлежали стороне AC, а вершины R и S — соответственно сторонам BC и BA.

1336 Даны угол hk и точка A, принадлежащая внутренней области этого угла. Постройте треугольник PQR, подобный данному треугольнику $P_1Q_1R_1$, так, чтобы $P \in h$, $Q \in h$, $R \in k$ и A принадлежала отрезку QR (рис. 413).

1337 Дана прямая l и точка O, не лежащая на ней. Используя гомотетию с центром в точке O, докажите, что множество середин всех отрезков OX, где X — любая точка прямой l, есть прямая, параллельная прямой l.

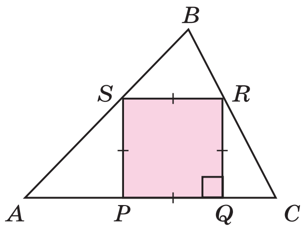


Рис. 412

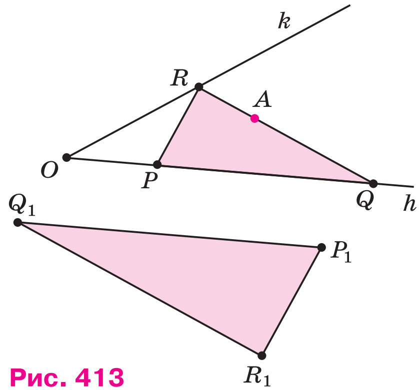


Рис. 413

1338 Даны прямая l и точка O, не лежащая на ней. Пусть X — любая точка прямой l. Используя гомотетию с центром в точке O, докажите, что множество точек, делящих отрезок OX в отношении $1 : 3$, считая от точки O, есть прямая, параллельная прямой l.

1339 Через данную точку A окружности проведены всевозможные хорды. Используя гомотетию с центром в точке A, докажите, что множество точек, делящих эти хорды в отношении $1 : 3$, считая от точки A, есть окружность. Укажите положение центра этой окружности.

1340 Пусть M — точка, делящая медиану AA_1 треугольника ABC в отношении $2 : 1$, считая от вершины, B_1 — середина стороны AC треугольника. Докажите, не используя свойство медиан, что при гомотетии с центром в точке M и коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$ отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, причём точка A переходит в точку A_1, а точка B — в точку B_1.

1341 Пользуясь предыдущей задачей, докажите теорему о точке пересечения медиан треугольника: три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Вопросы для повторения к главе XV

1 Дайте определение подобных многоугольников.

2 Что называется коэффициентом подобия двух многоугольников?

3 Сформулируйте теорему о равенстве подобных многоугольников.

4 Сформулируйте и докажите теорему о периметрах подобных многоугольников.

5 Сформулируйте и докажите теорему о площадях подобных многоугольников.

6 Какие две фигуры называются гомотетичными (центрально-подобными)?

7 Что мы понимаем под центром гомотетии и коэффициентом гомотетии двух фигур? Может ли коэффициент гомотетии быть отрицательным?

8 Что представляет собой гомотетия с коэффициентом k, если: а) $k = 1$, б) $k = -1$?

9 Сформулируйте основные свойства гомотетии.

10 Верно ли, что при гомотетии окружность переходит в окружность?

11 Можно ли утверждать, что при гомотетии угол переходит в равный ему угол?

12 Сформулируйте и докажите теорему о гомотетии многоугольников.

13 Какие две фигуры называются подобными?

14 Что мы понимаем под коэффициентом подобия? Может ли коэффициент подобия быть отрицательным числом?

15 Сформулируйте основные свойства подобия фигур.

16 Гомотетия задана центром O и двумя соответственными точками A и A_1. Объясните, как построить фигуру F_1, гомотетичную данной фигуре F, если фигура F является: а) точкой; б) многоугольником; в) окружностью.

17 Сформулируйте и докажите теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности.

18 Сформулируйте и докажите теорему о квадрате отрезка касательной к окружности.

19 Сформулируйте и докажите теорему о произведении отрезков секущих.

20 Докажите, что середины всех хорд окружности, один конец которых совпадает с данной точкой, есть окружность.

21 Объясните, как построить окружность, которая проходит через данную внутреннюю точку угла и касается сторон этого угла.

Дополнительные задачи

1342 При данном движении каждая из двух точек A и B отображается на себя. Докажите, что любая точка прямой AB отображается на себя.

1343 При данном движении каждая из вершин треугольника ABC отображается на себя. Докажите, что любая точка плоскости отображается на себя.

1344 Докажите, что два прямоугольника равны, если: а) смежные стороны одного прямоугольника соответственно равны смежным сторонам другого; б) сторона и диагональ одного прямоугольника соответственно равны стороне и диагонали другого.

1345 На каждом из рисунков 414, *а* и *б* изображены два подобных многоугольника. Найдите x, y, z, α и β.

1346 В треугольник ABC вписан параллелограмм $APNM$ так, как показано на рисунке 415. Известно, что $AC = 32$ см, $AB = 24$ см, а стороны параллелограмма относятся к друг другу как $4:3$. Определите длины сторон параллелограмма.

1347 На рисунке 416 $ABCD$ — параллелограмм. По данным этого рисунка найдите отношение площадей: а) треугольников DPQ и APB; б) треугольников DPQ и CBQ.

1348 Дан треугольник ABC. Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC, площадь которого в 2 раза больше площади треугольника ABC.

1349 Дан квадрат $ABCD$, площадь которого равна S. Постройте квадраты, площади которых равны: а) $\frac{1}{4}S$; б) $\frac{1}{9}S$; в) $3S$.

1350 На прямой отмечены точки на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 417). Найдите коэффициент k гомотетии, если известно,

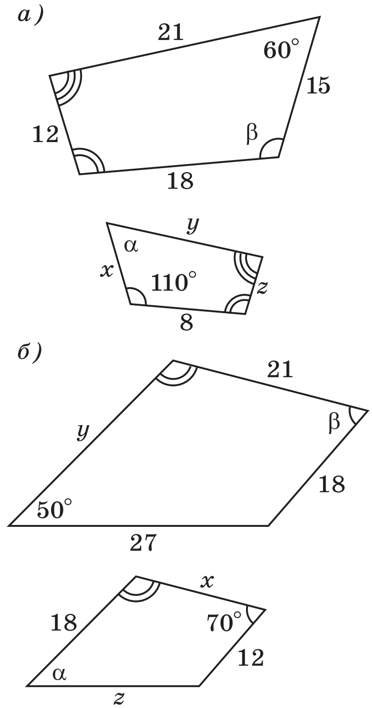


Рис. 414

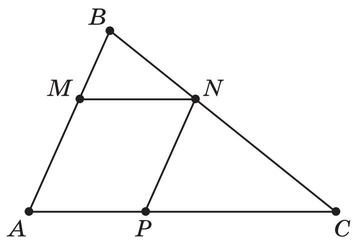


Рис. 415

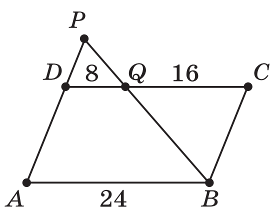


Рис. 416

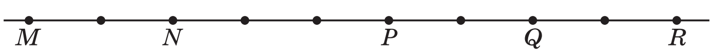


Рис. 417

что: а) точка N переходит в точку P и M — центр гомотетии; б) точка Q переходит в точку N и P — центр гомотетии; в) точка M переходит в точку R и N — центр гомотетии; г) точка M переходит в точку Q и R — центр гомотетии.

1351 Начертите два неравных отрезка AB и A_1B_1, лежащих на параллельных прямых. Постройте центр такой гомотетии, при котором отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1. Сколько решений имеет задача?

1352 Решите предыдущую задачу для случая, когда $AB = A_1B_1$. Сколько решений имеет задача?

1353 Пусть при некоторой гомотетии точки A, B и C переходят соответственно в точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если точка B лежит между точками A и C, то точка B_1 лежит между точками A_1 и C_1.

1354 Пользуясь предыдущей задачей, докажите, что если при некоторой гомотетии отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, то середина отрезка AB переходит в середину отрезка A_1B_1.

1355 Пусть центр гомотетии O лежит на данной окружности. Докажите, что данная окружность и та, в которую она переходит при гомотетии с центром в точке O, имеют в точке O общую касательную.

1356 В трапеции с основаниями MN и PQ диагонали MP и NQ пересекаются в точке O. Используя предыдущую задачу, докажите, что окружности, описанные около треугольников MNO и PQO, имеют общую касательную в точке O.

1357 Используя гомотетию с центром в точке пересечения медиан треугольника ABC, докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, в 2 раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника с вершинами в серединах сторон AB, BC и CA.

1358 Пусть точка O — точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны данной трапеции. Используя гомотетию с центром в точке O, докажите, что точка O лежит на прямой, проходящей через середины оснований трапеции.

1359 Дана окружность O радиуса r, точка P окружности и хорда AB. Постройте хорду PX так, чтобы её середина принадлежала хорде AB.

1360 В угол вписаны две окружности, одна из которых касается сторон угла в точках M и N, а другая — в точках P и Q. Докажите, что эти окружности на прямой MQ отсекают равные хорды.

1361 В окружности проведён диаметр AB. Через точку A и произвольную точку M этой окружности проведена прямая, пересекающая в точке K касательную к окружности в точке B. Докажите, что произведение $AM \cdot AK$ не зависит от выбора точки M на окружности.

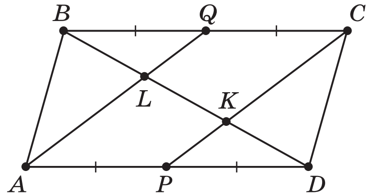


Рис. 418

1362 На рисунке 418 $ABCD$ — параллелограмм, P и Q — середины сторон AD и BC. Докажите, что: а) при гомотетии с центром в точке D и $k=2$ точка K переходит в точку L; б) при гомотетии с центром в точке B и $k=2$ точка L переходит в точку K.

1363 По данным рисунка 418, пользуясь предыдущей задачей, докажите, что $BK : KD = 2 : 1$.

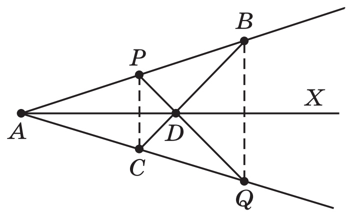


Рис. 419

1364 На рисунке 419 точки P и C, а также B и Q симметричны относительно биссектрисы AX угла BAC. Известно, что $AB=5$, $AC=3$. Используя гомотетию с центром в точке D пересечения отрезков PQ и BC, докажите, что $CD=\frac{3}{8}$.

1365 Дана окружность O радиуса r и точка A плоскости. Докажите, что множество середин отрезков AM, где M — любая точка окружности O радиуса r, есть окружность. Укажите положение центра этой окружности и найдите её радиус.

1366 Докажите, что при гомотетии с центром в точке пересечения медиан треугольника и коэффициентом $k=-2$ серединные перпендикуляры к сторонам треугольника переходят в прямые, содержащие высоты этого треугольника.

1367. Докажите, что центр описанной окружности, центроид и ортоцентр треугольника лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

Задачи повышенной трудности

Задачи к главе X

1368 Докажите утверждения об основных свойствах умножения вектора на число (п. 91).

Решение

1. Докажем, что для любых чисел k, l и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(kl)\vec{a}=k(l\vec{a})$. Если $\vec{a}=\vec{0}$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть $\vec{a}\neq\vec{0}$. Имеем $|(kl)\vec{a}|=$ $=|kl||\vec{a}|=|k||l||\vec{a}|=|k||l\vec{a}|=|k(l\vec{a})|$.

Далее, если $kl \geqslant 0$, то $(kl)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $k(l\vec{a}) \uparrow\uparrow \vec{a}$; если же $kl < 0$, то $(kl)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $k(l\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$. И в том и в другом случае $(kl)\vec{a} \uparrow\uparrow k(l\vec{a})$. Следовательно, $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$.

2. Докажем, что для любого числа k и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
Если $k = 0$, то справедливость этого равенства очевидна.
Пусть $k \neq 0$.

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (случай $\vec{a} \parallel \vec{b}$ рассмотрите самостоятельно). Отложим от какой-нибудь точки O векторы $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OA} = k\vec{a}$, а от точек A_1 и A — векторы $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AB} = k\vec{b}$ (рис. 420, *а*, *б*). Треугольники OA_1B_1 и OAB подобны с коэффициентом подобия $|k|$. Следовательно, $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OB_1} = k(\vec{a}+\vec{b})$. С другой стороны, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = k\vec{a} + k\vec{b}$. Итак, $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

3. Докажем, что для любых чисел k, l и любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $(k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$. Если $k = l = 0$, то справедливость этого равенства очевидна. Пусть хотя бы одно из чисел k, l отлично от нуля. Для определённости будем считать, что $|k| \geqslant |l|$ и, следовательно, $k \neq 0$ и $\left|\frac{l}{k}\right| \leqslant 1$.

Рассмотрим вектор $\vec{a} + \frac{l}{k}\vec{a}$. Очевидно, $\left(\vec{a} + \frac{l}{k}\vec{a}\right) \uparrow\uparrow \vec{a}$. Далее, $\left|\vec{a} + \frac{l}{k}\vec{a}\right| = |\vec{a}| + \frac{l}{k}|\vec{a}| = \left(1 + \frac{l}{k}\right)|\vec{a}|$.

Следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{a} + \frac{l}{k}\vec{a} = \left(1 + \frac{l}{k}\right)\vec{a}$. Умножая обе части этого равенства на k, получим, что справедливо равенство $k\vec{a} + l\vec{a} = (k+l)\vec{a}$.

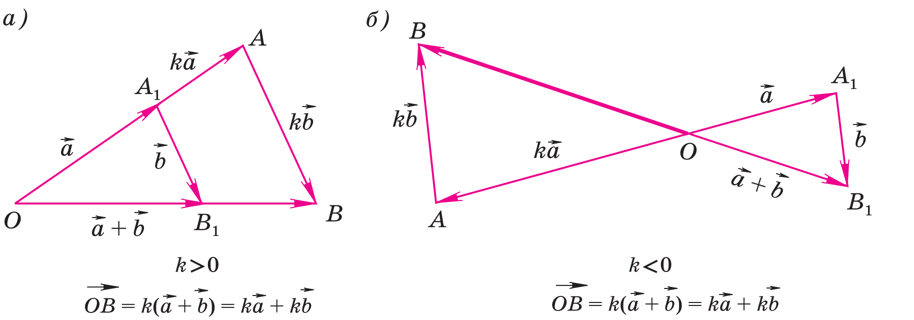


Рис. 420

1369 Даны четырёхугольник $MNPQ$ и точка O. Что представляет собой данный четырёхугольник, если $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$?

1370 Даны четырёхугольник $ABCD$ и точка O. Точки E, F, G и H симметричны точке O относительно середин сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Что представляет собой четырёхугольник $EFGH$?

1371 Дан треугольник ABC. Докажите, что вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ направлен вдоль биссектрисы угла A, а вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} - \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A.

1372 Докажите следующее утверждение: три точки A, B и C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда существуют числа k, l и m, одновременно не равные нулю, такие, что $k + 1 + m = 0$ и для произвольной точки O выполняется равенство $k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

1373 Используя векторы, докажите, что середины диагоналей четырёхугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

1374 Биссектрисы внешних углов треугольника ABC при вершинах A, B и C пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в точках A_1, B_1 и C_1. Используя векторы, докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

1375 Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих высоты неравностороннего треугольника ABC, а O — центр описанной около этого треугольника окружности. Используя векторы, докажите, что точка G пересечения медиан треугольника принадлежит отрезку HO и делит этот отрезок в отношении $2 : 1$, считая от точки H, т. е. $\frac{HG}{GO} = 2$.

Задачи к главе XI

1376 Вершины четырёхугольника $ABCD$ имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ и $D(x_4; y_4)$. Докажите, что этот четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ и $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

1377 Даны две точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Докажите, что координаты $(x; y)$ точки C, делящей отрезок AB в отношении λ (т. е. $\frac{AC}{CB} = \lambda$), выражаются формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$.

1378 Из физики известно, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан. Найдите координаты центра тяжести такой пластинки, если координаты её вершин равны: $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$.

1379 Вершины треугольника ABC имеют координаты $A\,(-3; 0)$, $B\,(0; 4)$, $C\,(3; 0)$. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Найдите координаты точки D.

1380 В треугольнике ABC: $AC = 9$ см, $BC = 12$ см. Медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найдите AB.

1381 Найдите координаты центра тяжести системы трёх масс m_1, m_2 и m_3, сосредоточенных соответственно в точках $A_1\,(x_1; y_1)$, $A_2\,(x_2; y_2)$, $A_3\,(x_3; y_3)$.

1382 В каждом из следующих случаев на оси абсцисс найдите точку M, для которой сумма её расстояний от точек A и B имеет наименьшее значение:
а) $A\,(2; 3)$, $B\,(4; -5)$;
б) $A\,(-2; 4)$, $B\,(3; 1)$.

1383 Докажите, что:
а) уравнение $Ax + By + C = 0$, где A и B одновременно не равны нулю, является уравнением прямой;
б) уравнение $x^2 - xy - 2 = 0$ не является уравнением окружности.

1384 Найдите точки пересечения двух окружностей, заданных уравнениями $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 1$, и вычислите длину их общей хорды.

1385 Даны три точки A, B, C и три числа α, β, γ. Найдите множество всех точек M, для каждой из которых сумма $\alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma CM^2$ имеет постоянное значение, если:
а) $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$; б) $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

1386 Даны прямая a и точка A, не лежащая на ней. Для каждой точки M_1 прямой a на луче AM_1 взята такая точка M, что $AM_1 \cdot AM = k$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

1387 Точка O не лежит на данной окружности. Для каждой точки M_1 окружности на луче OM_1 взята такая точка M, что $OM = k \cdot OM_1$, где k — данное положительное число. Найдите множество всех точек M.

1388 Пусть A и B — данные точки, k — данное положительное число, не равное 1.
а) Докажите, что множество всех точек M, удовлетворяющих условию $AM = kBM$, есть окружность (окружность Аполлония).
б) Докажите, что эта окружность пересекается с любой окружностью, проходящей через точки A и B, так, что их радиусы, проведённые в точку пересечения, взаимно перпендикулярны.

Задачи к главе XII

1389 На сторонах квадрата $MNPQ$ взяты точки A и B так, что $NA = \frac{1}{2}MN$, $QB = \frac{1}{3}MN$ (рис. 421). Докажите, что $\angle AMB = 45°$.

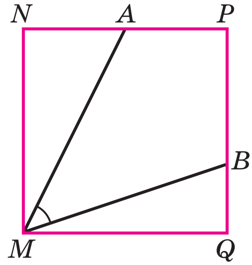


Рис. 421

1390 Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Площадь треугольника ODC есть среднее пропорциональное между площадями треугольников OBC и OAD. Докажите, что $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC или параллелограмм.

1391 Докажите, что площадь S произвольного четырёхугольника со сторонами a, b, c, d (последовательно) удовлетворяет неравенству $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$.

1392 Докажите, что в треугольнике ABC биссектриса AA_1 вычисляется по формуле $AA_1 = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b + c}$, где $b = AC$, $c = AB$.

1393 Выразите диагонали вписанного в окружность четырёхугольника через его стороны.

1394 Докажите, что площадь четырёхугольника, вписанного в окружность, может быть вычислена по формуле

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)},$$

где p — полупериметр, a, b, c, d — стороны четырёхугольника.

1395 Докажите, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна к одной из биссектрис треугольника.

1396 В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание AD равно 3, а боковая сторона CD, не перпендикулярная к основаниям, равна 6. Точка E — середина отрезка CD, угол CBE равен α. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

1397 В остроугольном треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, отрезки AM и CN — высоты треугольника, точка O — центр описанной окружности. Угол ABC равен β, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S. Найдите сторону AC.

1398 В треугольнике ABC проведены высота AH длиной h, медиана AM длиной l, биссектриса AN. Точка N — середина отрезка MH. Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения высот треугольника ABC.

Задачи к главе XIII

1399 На рисунке 422 изображён правильный десятиугольник, вписанный в окружность радиуса R, AC — биссектриса угла OAB. Докажите, что: а) $\triangle ABC \sim \triangle OAB$; б) $AB = AC = OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

1400 Докажите, что отрезок AK, изображённый на рисунке 423, равен стороне правильного десятиугольника, вписанного в окружность с центром O.

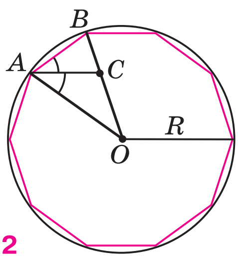


Рис. 422

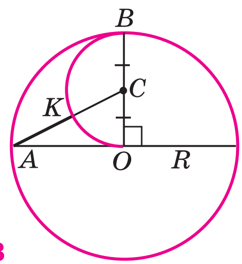


Рис. 423

1401 Около правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ описана окружность с центром O. Вершинами треугольника ABC являются середины сторон A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_4 пятиугольника. Докажите, что центр O данной окружности и центр O_1 окружности, вписанной в треугольник ABC, симметричны относительно прямой AC.

1402* В данную окружность впишите правильный десятиугольник.

1403 В данную окружность впишите правильный пятиугольник.

1404 В данную окружность впишите пятиконечную звезду.

1405 Пусть M — произвольная точка, лежащая внутри правильного n-угольника. Докажите, что сумма перпендикуляров, проведённых из точки M к прямым, содержащим стороны n-угольника, равна nr, где r — радиус вписанной окружности.

1406 Углы треугольника образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2. Докажите, что середины сторон и основания высот этого треугольника являются шестью вершинами правильного семиугольника.

1407 Пусть $ABCD$ — квадрат, а $A_1B_1C_1$ — правильный треугольник, вписанные в окружность радиуса R. Докажите, что сумма $AB + A_1B_1$ равна длине полуокружности с точностью до $0{,}01R$.

1408 По данным рисунка 424 докажите, что длина отрезка AC равна длине окружности с центром O радиуса R с точностью до $0{,}001R$.

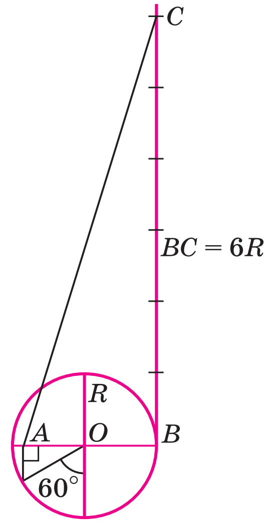


Рис. 424

1409 На рисунке 425 изображены четыре полуокружности: AEB, AKC, CFD, DLB, причём $AC=DB$. Докажите, что площадь закрашенной фигуры равна площади круга, построенного на отрезке EF как на диаметре.

1410 Постройте границу круга, площадь которого равна:
а) площади кольца между двумя данными концентрическими окружностями;
б) площади данного полукруга;
в) площади данного кругового сектора, ограниченного дугой в $60°$.

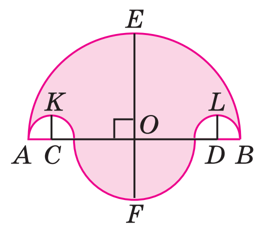


Рис. 425

Задачи к главе XIV

1411 При данном движении g точка A отображается в точку B, а точка B — в точку A. Докажите, что g — центральная симметрия или осевая симметрия.

1412 Даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Докажите, что существуют два и только два движения, при которых точки A и B отображаются соответственно в точки A_1 и B_1.

1413 Докажите, что два параллелограмма равны, если диагонали и угол между ними одного параллелограмма соответственно равны диагоналям и углу между ними другого.

1414 Докажите, что две трапеции равны, если основания и боковые стороны одной трапеции соответственно равны основаниям и боковым сторонам другой.

1415 Докажите, что два треугольника равны, если две неравные стороны и разность противолежащих им углов одного треугольника соответственно равны двум сторонам и разности противолежащих им углов другого.

1416 Вершины одного параллелограмма лежат соответственно на сторонах другого параллелограмма. Докажите, что точки пересечения диагоналей этих параллелограммов совпадают.

1417 Даны две окружности и прямая. Постройте правильный треугольник так, чтобы две вершины лежали соответственно на данных окружностях, а высота, проведённая из третьей вершины, — на данной прямой.

1418 На стороне угла AOB с недоступной вершиной дана точка M. Постройте отрезок, равный отрезку OM.

1419 Даны две пересекающиеся окружности. Постройте отрезок, концы которого лежат соответственно на данных окружностях, а его середина совпадает с одной из точек пересечения данных окружностей.

1420 Постройте треугольник по трём медианам.

1421 Постройте трапецию, стороны которой соответственно равны данным отрезкам.

1422 Даны точки A и B и две пересекающиеся прямые c и d. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы вершины C и D лежали соответственно на прямых c и d.

1423 Даны прямая, окружность и точка A, не лежащая на них. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы вершина B лежала на данной прямой, а вершина D — на данной окружности.

Задачи к главе XV

1424 В данный сектор впишите квадрат так, чтобы две его смежные вершины принадлежали дуге AB сектора, а две другие вершины — соответственно радиусам OA и OB.

1425 Даны отрезки a, m, n $(m < n)$. Постройте прямоугольник $ABCD$ так, чтобы $AB = a$, $BC : AC = m : n$.

1426 Даны отрезки a, m, n. Постройте ромб со стороной a, диагонали которого относятся как $m : n$.

1427 В данный равносторонний треугольник впишите другой равносторонний треугольник так, чтобы его стороны были перпендикулярны к сторонам данного.

1428 В угол вписаны две окружности, одна из которых касается сторон угла в точках M и N, а другая — в точках P и Q. Докажите, что эти окружности на прямой MQ отсекают равные хорды.

1429 Дана окружность и точка A вне этой окружности. Через точку A провести секущую к окружности так, чтобы внешняя часть секущей была в 2 раза больше внутренней.

1430 Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

1431 Пользуясь результатом задачи **909**, применяя гомотетию, докажите, что для неравностороннего треугольника основания высот, середины сторон и середины отрезков высот, заключённых между вершинами треугольника и его ортоцентром, принадлежат одной окружности (окружности девяти точек). Центр этой окружности лежит на прямой Эйлера, а радиус равен половине радиуса описанной окружности данного треугольника.

Исследовательские задачи

Предлагаемые задачи ориентированы на проведение исследований, связанных как с решением некоторых задач из учебника, так и с постановкой новых задач. Результаты исследований в некоторых задачах можно сопоставить со сведениями, относящимися к данной задаче и изложенными в указанных книгах из списка литературы на странице 367. Например, ссылка [1, пп. 28, 29] в задаче 1 для 7 класса означает, что вопрос о различных признаках равенства треугольников рассматриваются в пп. 28 и 29 книги, указанной в списке литературы под номером 1.

7 класс

1 Сформулируйте новые признаки равенства треугольников, используя не только стороны и углы, но также медианы, биссектрисы и высоты треугольников. Примеры таких признаков дают задачи **166**, **181**, **420**, [1, пп. 28, 29].
Эта задача может быть поставлена перед группой учащихся: создать банк признаков равенства треугольников; может использоваться как предмет интеллектуального соревнования между двумя или несколькими группами учащихся.

2 Сформулируйте признаки равенства равнобедренных треугольников.

3 Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников [1, п. 30].

4 Для каждого из новых признаков равенства треугольников рассмотрите задачу на построение: построить с помощью циркуля и линейки треугольник по тем элементам, которые фигурируют в признаке.

8 класс

1 Задача **826** и её обобщение на случай невыпуклого четырёхугольника. (Предложите способ решения, применимый для любого четырёхугольника.)

2 Теорема Птолемея и ряд задач, решаемых с её помощью (задачи **865**, **912**, **916**). Предложите свои задачи на применение этой теоремы [2, п. 59].

3 Окружность Эйлера (задача **918**). Дополнительно исследуйте, сколько точек, указанных в задаче **918**, могут быть различными.

4 Прямая Симсона (задача **919**). Исследуйте все возможные случаи [2, п. 58].

5 Прямая Эйлера: докажите, что в любом неравностороннем треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений), центр описанной около треугольника окружности и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой. Установите, в каком отношении эти точки разделяют отрезок с концами в крайних точках [2, п. 36].

9 класс

1 Проведите полное исследование задачи на построение треугольника ABC по углу A и сторонам AB и BC. При каких условиях задача: а) имеет решение; б) имеет единственное решение; в) имеет не единственное решение (и сколько решений); г) не имеет решений?

2 Окружности Аполлония и их свойства (задачи **1070**, **1388**), [2, пп. 53, 54].

3 Использование движений в задачах на доказательство (задачи **1290—1292**, **1411—1416**), [1, п. 163; 3, п. 44].

4 Использование движений в задачах на построение (задачи **1293—1295**, **1417—1423**), [1, п. 163; 3, п. 44].

5 Пропорциональные отрезки и метод масс. Использование центра масс системы точек для решения задач и доказательства теорем [2, п. 67].

Темы рефератов

Для подготовки рефератов по предлагаемым темам нужно использовать указанную литературу.

1 Характеристическое свойство фигуры. Характеристические свойства прямоугольника, ромба, квадрата, окружности [1, пп. 72—76; 2, пп. 3—5, 8].

2 Формулы площадей различных четырёхугольников [3, пп. 32, 33].

3 Многоугольники на решётке. Формула Пика [1, пп. 82, 83; 2, п. 24].

4 Изопериметрические задачи [2, п. 27; 3, пп. 40, 41].

5 Теоремы Чевы и Менелая [2, п. 34; 1, пп. 101, 102].

6 Прямая и окружность Эйлера [3, пп. 47, 48; 1, п. 166].

7 Различные средние для нескольких отрезков [2, пп. 37—39].

8 Методы решения задач на построение (метод подобия, метод геометрических мест точек, использование движений) [2, п. 40; 3, пп. 17, 36, 37, 44].

9 Радикальная ось двух окружностей, радикальный центр трёх окружностей [2, пп. 49—51].

10 Вневписанные окружности [2, п. 61; 1, п. 117].

11 Теорема Морли [3, п. 28; 1, п. 146].

12 Использование движений при решении задач [3, п. 44; 1, п. 163].

13 Центральное подобие и его применения (теорема Наполеона, прямая и окружность Эйлера, прямая Симсона) [3, пп. 45—48; 1, пп. 164—167].

14 Инверсия и её применения (теорема Птолемея и обратная ей, формула Эйлера для квадрата расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника, теорема Фейербаха, задача Аполлония) [3, пп. 49—53; 1, пп. 168—175].

Список литературы

1 Планиметрия. Пособие для углублённого изучения математики / В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Поздняк и др. — М.: Физматлит, 2019.

2 Геометрия. 8 класс. Дополнительные главы к учебнику / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. — М.: Просвещение, 2022.

3 Геометрия. 9 класс. Дополнительные главы к учебнику / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. — М.: Просвещение, 2022.

4 Глейзер Г. И. История математики в школе. — М.: Просвещение, 1981—1983.

Комплексные задания

Задание 1 (7 класс). Пётр хочет украсить открытку узором, который увидел на рисунке (рис. 426). Он испытывает затруднения с выполнением узора, не зная с чего начать. Единственное, что он понял, что окружности на рисунке как-то связаны.

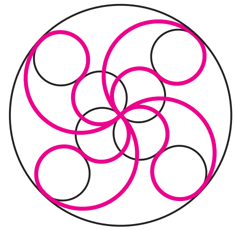


Рис. 426

1. Выразите радиусы всех окружностей через n, если диаметр большой окружности n см.
2. Опишите последовательность построений Петра, которые он должен выполнить для получения узора.
3. Перенесите рисунок на лист бумаги.
4. Предложите свой узор, состоящий из различных окружностей.

Задание 2 (7–8 класс). На рисунке 427 изображены хорды окружности, имеющие общую точку.

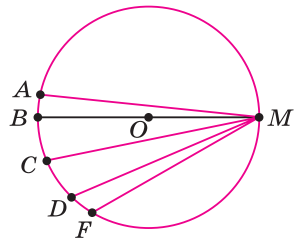


Рис. 427

1. Не проводя измерений, запишите хорды в порядке убывания их длин. Поясните свои действия.
2. Дополните рисунок хордой с концом в точке M, имеющей длину меньше любой из изображённых на рисунке хорд.
3. Начертите хорду такой же длины, как и MF, не используя измерение длины.

Задание 3 (8 класс). В питомнике цветы выращивают на круглых клумбах. Анна стоит в центре клумбы. Для посадки цветов требуется разделить клумбу на части: в зависимости от количества частей она сможет посадить разные виды цветов. Для деления клумбы у неё есть 5 шаблонов (рис. 428) с углом α: 30°, 45°, 60°, 75°, 90°.

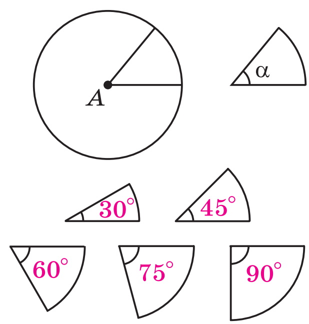


Рис. 428

1. При делении клумбы требуется применить только один шаблон. Сколькими шаблонами Анна сможет воспользоваться?
2. Анна выбирает только один шаблон. Какое максимальное количество разных видов цветов сможет высадить Анна?

3. Анна хочет посадить 5 видов цветов, используя деление клумбы на неравные части с помощью разных шаблонов. Какими шаблонами она может воспользоваться?

Задание 4 (8 класс). Виктор нашёл в Интернете информацию о необычном практическом способе рассуждений при доказательстве теоремы о сумме углов треугольника. В нём использовалось перегибание бумажной модели треугольника по некоторым линиям, как указано на рисунке 429. Если последовательно произвести сгибы бумажного треугольника, то все углы треугольника сойдутся в одной точке и образуют развёрнутый угол.

Прежде чем рассказать на уроке геометрии о найденном способе рассуждений, Виктор решил выполнить указанные действия. К его удивлению, он не смог получить такой результат, как на рисунке: одна вершина треугольника накладывалась на противоположную сторону, а две другие стороны не удавалось совместить с ней.

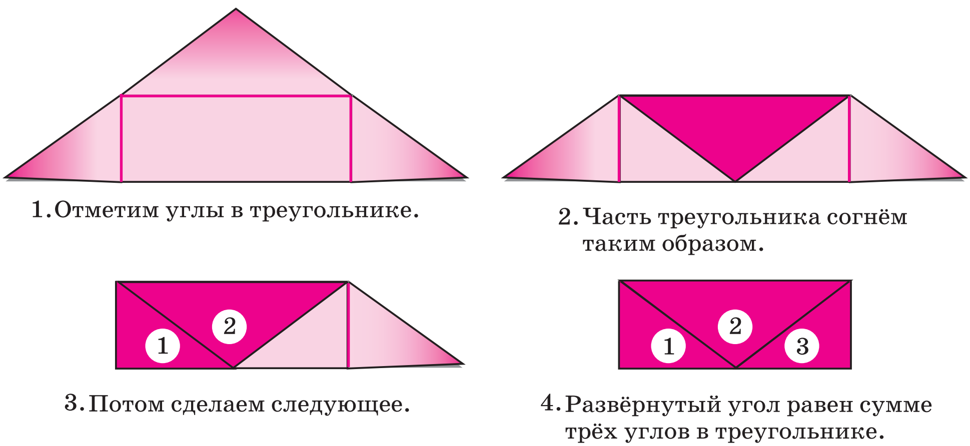
1. Получится ли у вас согнуть бумажную модель треугольника таким способом, как указано на рисунке?

2. Что не учёл Виктор при выполнении первого сгиба?

3. Почему совместятся две вершины треугольника, как это показано на рисунке 429 (3)? Обоснуйте ответ.

4. Назовите вид четырёхугольника, который получился на последнем шаге. Обоснуйте ответ.

5. Как изменятся рассуждения, если исходный треугольник будет прямоугольным?



1. Отметим углы в треугольнике.

2. Часть треугольника согнём таким образом.

3. Потом сделаем следующее.

4. Развёрнутый угол равен сумме трёх углов в треугольнике.

Рис. 429

6. Помогите Виктору составить список указаний для одноклассников, чтобы у них получилось сложить модель, представленную на рисунке.

7. Сформулируйте теорему, которую хотел доказать Виктор.

8. С какой целью Виктор, получив информацию из Интернета, решил выполнить указанные действия?

Задание 5 (9 класс). Мастер вырезал 3 детских деревянных вкладыша, используя одинаковые заготовки из бука, размером 6 см × 6 см. В центре он прикрепил держатель. Схематично вкладыши изображены на рисунке 430.

а) *б)* *в)*

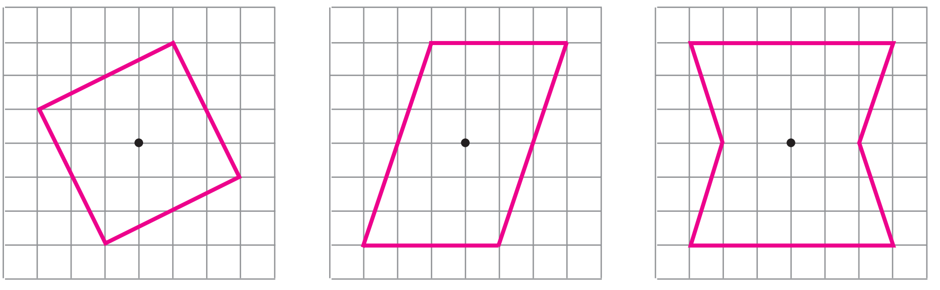


Рис. 430

1. При изготовлении какого вкладыша он получил больше отходов?

2. Играя со вкладышами, ребёнок может поворачивать и вкладывать их в форму. Сколькими способами это можно сделать с каждым вкладышем? Результаты занесите в таблицу.

Вкладыши	Количество способов
№ 1	
№ 2	
№ 3	

Задание 6 (7—9 класс). Более двадцати веков, начиная с III века до н. э., математики всего мира пытались доказать утверждение, сформулированное древнегреческим учёным Евклидом в «Началах» и известное как пятый постулат (см. Приложение 2 на с. 380). При доказательстве «разрешалось» применять только аксиомы, указанные в «Началах», или их следствия (теоремы). Все попытки обосновать пятый постулат были безуспешны, так как использовалось какое-либо другое утверждение, которое само доказывалось с помощью пятого постулата.

1. В каком веке математики «осознали», что пятый постулат невозможно получить как следствие из аксиом Евклида?

2. Евклид называл прямым тот угол, который равен своему смежному. Противоречит ли определение прямого угла, данное Евклидом, тому определению, которое приведено в учебнике? Ответ объясните.

3. Рассмотрите рисунки 431, *а–в* и выберите тот, который подходит для иллюстрации пятого постулата.

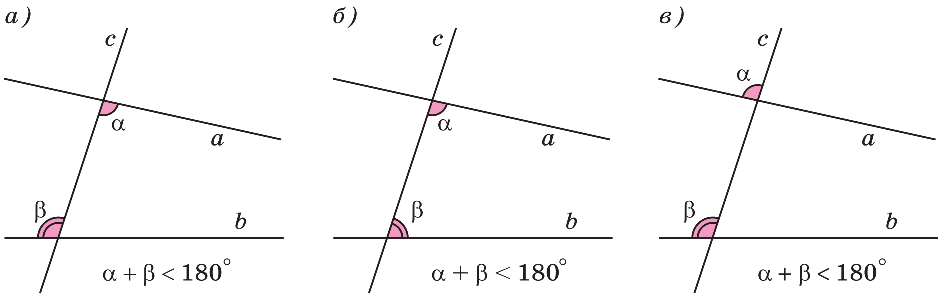


Рис. 431

4. Набор аксиом Евклида стал основой для аксиоматики, на которой строится курс геометрии, изучаемый в школе. Правда, вместо пятого постулата используется эквивалентное утверждение, известное как аксиома параллельных прямых: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной». Сформулируйте какое-либо утверждение, при доказательстве которого используется аксиома параллельных прямых.

Приложения

1 Об аксиомах планиметрии

При изучении геометрии мы опирались на ряд аксиом. Напомним, что аксиомами называются те основные положения геометрии, которые принимаются в качестве исходных. Вместе с так называемыми основными понятиями они образуют фундамент для построения геометрии. Первыми основными понятиями, с которыми мы познакомились, были понятия точки и прямой. Определения основных понятий не даются, а их свойства выражаются в аксиомах. Используя основные понятия и аксиомы, мы даём определения новых понятий, формулируем и доказываем теоремы и таким образом изучаем свойства геометрических фигур.

Отметим, что не все аксиомы, необходимые для построения планиметрии, были приведены в нашем курсе — для упрощения изложения некоторые из них мы не формулировали, хотя ими и пользовались. Здесь мы приведём все аксиомы планиметрии.

Первые три аксиомы характеризуют взаимное расположение точек и прямых.

1. **Каждой прямой принадлежат по крайней мере две точки**[1].
2. **Имеются по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.**
3. **Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.**

Для точек, лежащих на одной прямой, мы использовали понятие «лежать между», которое относим к основным понятиям геометрии. Свойство этого понятия выражено в следующей аксиоме:

4. **Из трёх точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.**

Подчеркнём, что, говоря «точка B лежит между точками A и C», мы имеем в виду, что A, B, C — различные точки прямой и точка B лежит также между точками C и A. Иногда вместо этих слов мы говорим, что точки A и B лежат по одну сторону от точки C (аналогично точки B и C лежат по одну сторону от точки A) или точки A и C лежат по разные стороны от точки B.

[1] Такие понятия, как «принадлежать», «множество», «число» и т. д., относятся не только к геометрии, но и к другим разделам математики. Поэтому мы считаем их известными и не относим к числу основных понятий планиметрии.

5. **Каждая точка *O* прямой разделяет её на две части (два луча) так, что любые две точки одного и того же луча лежат по одну сторону от точки *O*, а любые две точки разных лучей лежат по разные стороны от точки *O*.**

При этом точка O не принадлежит ни одному из указанных лучей.

Напомним, что отрезком AB называется геометрическая фигура, состоящая из точек A и B и всех точек прямой AB, лежащих между A и B. Коротко можно сказать так: отрезок — это часть прямой, ограниченная двумя точками. Если отрезок AB не имеет общих точек с прямой a, то говорят, что точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; если же отрезок AB пересекается с прямой a (в некоторой точке C, лежащей между точками A и B), то говорят, что точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.

6. **Каждая прямая *a* разделяет плоскость на две части (две полуплоскости) так, что любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой *a*, а любые две точки разных полуплоскостей лежат по разные стороны от прямой *a*.**

Прямая a называется **границей** каждой из указанных полуплоскостей; её точки не принадлежат ни одной из этих полуплоскостей.

Следующие аксиомы связаны с понятиями наложения и равенства фигур. Понятие наложения относится в нашем курсе к основным понятиям геометрии. В главе I мы определили равенство геометрических фигур, используя понятие наложения. Мы опирались на наглядные представления о наложении фигур и допускали, что всякая геометрическая фигура может перемещаться как единое целое, наподобие того как перемещаются материальные тела. Но геометрические фигуры — не материальные тела, а воображаемые объекты, поэтому наложение геометрических фигур следует понимать в особом смысле.

Чтобы выяснить этот смысл, заметим, что при наложении фигуры Ф на равную ей фигуру $Ф_1$, как мы представляем его наглядно, каждая точка фигуры Ф накладывается на некоторую точку фигуры $Ф_1$. Иначе говоря, каждая точка фигуры Ф сопоставляется некоторой точке фигуры $Ф_1$. Но мы можем сопоставить каждую точку фигуры Ф некоторой точке фигуры $Ф_1$ и без непосредственного наложения Ф на $Ф_1$ (рис. 432). Такое сопоставление называется отображением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ (при этом подразумевается, что

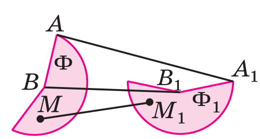


Рис. 432

каждая точка фигуры $Ф_1$ оказывается сопоставленной некоторой точке фигуры Ф). Под наложением фигуры Ф на фигуру $Ф_1$ мы понимаем отображение Ф на $Ф_1$. Более того, мы считаем, что при этом не только точки фигуры Ф, но и любая точка плоскости отображается на определённую точку плоскости, т. е. **наложение — это отображение плоскости на себя.**

Однако не всякое отображение плоскости на себя мы называем наложением. Наложения — это такие отображения плоскости на себя, которые обладают свойствами, выраженными в аксиомах (см. ниже аксиомы 7—13). Чтобы сформулировать эти аксиомы, введём понятие равенства фигур. Пусть Ф и $Ф_1$ — две фигуры. **Если существует наложение, при котором фигура Ф отображается на фигуру $Ф_1$, то мы говорим, что фигуру Ф можно совместить наложением с фигурой $Ф_1$, или фигура Ф равна фигуре $Ф_1$.** Сформулируем теперь аксиомы о свойствах наложений.

7. **Если при наложении совмещаются концы двух отрезков, то совмещаются и сами отрезки.**
8. **На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.**

Это означает, что если даны какой-то отрезок AB и какой-то луч h с началом в точке O, то на луче h существует, и притом только одна, точка C, такая, что отрезок AB равен отрезку OC.

9. **От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвёрнутому углу, и притом только один.**

Это означает, что если даны какой-то луч OA и какой-то неразвёрнутый угол CDE, то в каждой из двух полуплоскостей с границей OA существует, и притом только один, луч OB, такой, что угол CDE равен углу AOB.

10. **Любой угол hk можно совместить наложением с равным ему углом h_1k_1 двумя способами: 1) так, что луч h совместится с лучом h_1, а луч k — с лучом k_1; 2) так, что луч h совместится с лучом k_1, а луч k — с лучом h_1.**
11. **Любая фигура равна самой себе.**
12. **Если фигура Ф равна фигуре $Ф_1$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре Ф.**
13. **Если фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$, а фигура $Ф_2$ равна фигуре $Ф_3$, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_3$.**

Как видно, все приведённые аксиомы соответствуют нашим наглядным представлениям о наложении и равенстве фигур и поэтому не вызывают сомнений.

Следующие две аксиомы связаны с измерением отрезков. Прежде чем их сформулировать, напомним, как измеряются отрезки. Пусть AB — измеряемый отрезок, PQ — выбранная единица измерения отрезков. На луче AB отложим отрезок $AA_1 = PQ$, на луче A_1B — отрезок $A_1A_2 = PQ$ и т. д. до тех пор, пока точка A_n не совпадёт с точкой B либо точка B не окажется лежащей между точками A_n и A_{n+1}. В первом случае говорят, что длина отрезка AB при единице измерения PQ выражается числом n (или что отрезок PQ укладывается в отрезке AB n раз). Во втором случае можно сказать, что длина отрезка AB при единице измерения PQ приближённо выражается числом n. Для более точного измерения отрезок PQ делят на равные части, обычно на 10 равных частей, и с помощью одной из этих частей измеряют описанным способом остаток A_nB. Если при этом десятая часть отрезка PQ не укладывается целое число раз в измеряемом остатке, то её также делят на 10 равных частей и продолжают процесс измерения. Мы предполагаем, что таким способом можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину при данной единице измерения конечной или бесконечной десятичной дробью. Это утверждение кратко сформулируем так:

14. При выбранной единице измерения отрезков длина каждого отрезка выражается положительным числом.

Кроме того, мы принимаем аксиому существования отрезка данной длины.

15. При выбранной единице измерения отрезков для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Систему аксиом планиметрии завершает аксиома параллельных прямых.

16. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Отметим, что для построения геометрии можно использовать различные системы аксиом. Например, вместо аксиомы параллельных прямых можно принять в качестве аксиомы утверждение о том, что сумма углов треугольника равна 180°. Тогда утверждение «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» можно доказать как теорему (попробуйте провести такое доказательство самостоятельно). От различных систем аксиом требуется лишь, чтобы они были эквивалентны, т. е. приводили бы к одним и тем же выводам.

Иногда стремятся к тому, чтобы аксиомы были независимы, т. е. ни одну из них нельзя было вывести из остальных. Мы не ставили перед собой такой цели. Например, утверждение аксиомы 5 может быть доказано на основе остальных аксиом, т. е. фактически это утверждение является теоремой, а не аксиомой. Однако для упрощения изложения мы приняли его в качестве аксиомы.

В заключение рассмотрим одну из самых первых теорем нашего курса — теорему, выражающую первый признак равенства треугольников (п. 15). Её доказательство опиралось на наглядные представления о наложении и равенстве фигур, понятие аксиомы тогда ещё не было введено. Напомним это доказательство и рассмотрим его с точки зрения принятых нами аксиом.

Нужно было доказать, что если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. С этой целью мы рассматривали такое наложение, при котором вершина A совмещается с вершиной A_1, а стороны AB и AC треугольника ABC накладываются соответственно на лучи A_1C_1 и A_1B_1. При этом мы опирались на наглядно очевидный факт, что такое наложение существует, поскольку углы A и A_1 равны. Теперь можно сказать, что существование такого наложения следует из аксиомы 10.

Далее мы рассуждали так: поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1, в частности совместятся точки B и B_1, C и C_1. Как обосновать этот факт, опираясь на аксиомы? Очень просто.

По аксиоме 8 на луче A_1B_1 от точки A_1 можно отложить только один отрезок, равный отрезку AB. Но по условию теоремы $AB = A_1B_1$, поэтому при нашем наложении точка B совместится с точкой B_1. Аналогично точка C совместится с точкой C_1. Остаётся сослаться на аксиому 7, чтобы обосновать тот факт, что сторона BC совместится со стороной B_1C_1. Теперь можно сделать вывод, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместились и, значит, они равны.

Как видим, само доказательство теоремы о первом признаке равенства треугольников, по существу, не изменилось, только теперь мы опирались уже не на наглядно очевидные факты, а на аксиомы, в которых эти факты выражены.

2 Некоторые сведения о развитии геометрии

Первое сочинение, содержащее простейшие геометрические сведения, дошло до нас из Древнего Египта. Оно относится к XVII в. до н. э. В нём содержатся правила вычисления площадей и объёмов некоторых фигур и тел. Эти правила были получены практическим путём, без какого-либо логического доказательства их справедливости.

Становление геометрии как математической науки произошло позднее и связано с именами греческих учёных Фалеса (ок. 625—547 гг. до н. э.), Пифагора (ок. 580—500 гг. до н. э.), Демокрита (ок. 460—370 гг. до н. э.), Евклида (III в. до н. э.) и др.

В знаменитом сочинении Евклида «Начала» были систематизированы основные известные в то время геометрические сведения. Главное же — в «Началах» был развит аксиоматический подход к построению геометрии, который состоит в том, что сначала формулируются основные положения (аксиомы), а затем на их основе посредством рассуждений доказываются другие утверждения (теоремы)[1].

Полученные результаты используются как на практике, так и в дальнейших научных исследованиях. Некоторые из аксиом, предложенных Евклидом, и сейчас используются в курсах геометрии. Часть из них в современной формулировке имеется в нашем курсе. Например: «Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна».

Большой вклад в дальнейшее исследование различных вопросов геометрии внесли Архимед (ок. 287—212 гг. до н. э.), Аполлоний (III в. до н. э.) и другие древнегреческие учёные.

Качественно новый этап в развитии геометрии начался лишь много веков спустя — в XVII в. н. э. — и был связан с накопленными к этому времени достижениями алгебры. Выдающийся французский математик и философ Р. Декарт (1596—1650) предложил новый подход к решению геометрических задач. В своей «Геометрии» (1637) он ввёл метод координат, связав геометрию и алгебру, что позволило решать многие геометрические задачи алгебраическими методами.

В развитии геометрии важную роль сыграла аксиома, которая в «Началах» Евклида называлась пятым постулатом. Формулировка пятого постулата у Евклида весьма сложна[2]. Поэтому обычно

---

[1] На возможность такого подхода впервые указал древнегреческий учёный Аристотель (ок. 384—322 гг. до н. э.).

[2] Пятый постулат: «И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых, то продолженные эти прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

его заменяют эквивалентной ему аксиомой параллельных прямых: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Много веков усилия большого числа учёных были направлены на доказательство пятого постулата. Это объяснялось тем, что число аксиом стремились свести к минимуму. Учёные думали, что пятый постулат можно доказать как теорему, опираясь на остальные аксиомы.

В конце XVIII в. у некоторых геометров возникла мысль о невозможности доказать пятый постулат. Решение этого вопроса было найдено великим русским математиком Николаем Ивановичем Лобачевским (1792—1856).

Вся творческая жизнь нашего выдающегося соотечественника была связана с Казанским университетом, где он учился, затем был профессором, а с 1827 г. — ректором университета. Его очень рано заинтересовала геометрия, и он, как и многие его предшественники, пытался доказать пятый постулат Евклида. Лобачевский предпринял попытку доказать пятый постулат от противного: он предположил, что через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести несколько прямых, не пересекающих данную. Исходя из этого, он попытался получить утверждение, которое противоречило бы аксиомам или полученным из них теоремам. Если бы такое утверждение удалось получить, то это означало бы, что предположение неверно, а верно противоположное утверждение: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, не пересекающую данную. Тем самым пятый постулат Евклида был бы доказан.

Но Лобачевский не получил противоречивых утверждений. На основании этого им был сделан замечательный вывод: можно построить другую геометрию, отличную от геометрии Евклида. Такая геометрия им была построена. Её называют теперь геометрией Лобачевского. Сообщение об открытии новой геометрии было сделано Лобачевским в 1826 г.

К аналогичным выводам пришёл венгерский математик Я. Бойяи (1802—1860), но он свои результаты опубликовал несколько позже, в 1832 г. В рукописях великого немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855) высказывались идеи, близкие к идеям Лобачевского и Бойяи. Однако он, опасаясь критики, не решился их обнародовать.

Открытие нашим великим соотечественником новой геометрии оказало огромное влияние на развитие науки. Геометрия Лобачевского широко используется в естествознании. Неизмеримо влияние новой геометрии на развитие самой геометрии. Наиболее ярко оно выразилось в дальнейшем углублении наших представлений о пространстве: ведь до Лобачевского казалось, что геометрией окружающего нас пространства может быть только евклидова геометрия. Но так как возможна другая геометрия, то истинность той или иной геометрии может быть проверена лишь опытным путём. Современной наукой установлено, что евклидова геометрия лишь приближённо, хотя и с весьма большой точностью, описывает окружающее нас пространство, а в космических масштабах она имеет заметное отличие от геометрии реального пространства.

Бурное развитие математики в XIX в. привело к ряду замечательных открытий в геометрии. Так, выдающимся немецким математиком Б. Риманом (1826—1866) была создана новая геометрия, обобщающая и геометрию Евклида, и геометрию Лобачевского.

Читатель вправе спросить: а являются ли геометрия Евклида и геометрия Лобачевского непротиворечивыми? Не может ли так случиться, что при дальнейшем развитии как той, так и другой геометрии получатся противоречивые выводы? Уже в конце XIX в. было доказано, что если непротиворечива геометрия Евклида, то непротиворечива и геометрия Лобачевского. Непротиворечивость той или иной геометрии доказывается с помощью какой-либо интерпретации (модели) её основных понятий и аксиом. Например, одной из известных интерпретаций евклидовой геометрии является арифметическая модель, в которой точка есть пара чисел $(x; y)$, записанная в определённом порядке, а прямая есть множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению $ax + bx + c = 0$, где a и b — некоторые числа $(a^2 + b^2 \neq 0)$. С помощью этой модели вопрос о непротиворечивости евклидовой геометрии сводится к вопросу о непротиворечивости арифметики, имеющей дело с вещественными числами. О моделях, реализующих систему аксиом геометрии Лобачевского, можно прочитать в различных книгах, например в книге [1] из списка литературы (см. с. 367).

Вопрос о непротиворечивости той или иной системы аксиом связан с важными проблемами непротиворечивости, полноты и независимости систем аксиом, определяющих ту или иную геометрию. Перечисленные проблемы относятся к предмету, называемому «Основания геометрии». Крупнейший вклад в решение этих проблем внёс великий немецкий математик Д. Гильберт (1862—1943).

Отметим, что в настоящее время геометрия широко используется в самых разнообразных разделах естествознания: в физике, химии, биологии и т. д. Неоценимо её значение в прикладных науках: в машиностроении, геодезии, картографии. Методы геометрии широко применяются практически во всех разделах науки и техники и, конечно же, в самой математике.

3 Уголковый отражатель

В 7 классе было рассмотрено свойство прямоугольных треугольников: **сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°**.

Это свойство находит применение в конструкциях различных приборов и механизмов. Так, например, это свойство лежит в основе конструкции простейшего уголкового отражателя. Прежде чем описать его устройство, рассмотрим следующую задачу.

Задача

Угол между зеркалами OA и OB равен 90°. Луч света, падающий на зеркало OA под углом α, отражается от него, а затем отражается от зеркала OB (рис. 433). Доказать, что падающий и отражённый лучи параллельны.

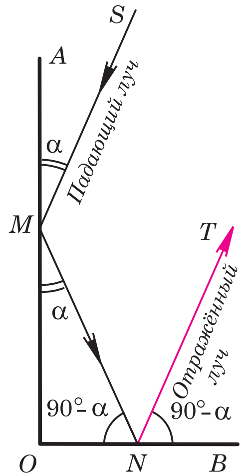


Рис. 433

Решение

По закону отражения света падающий луч SM и луч MN составляют с прямой OA равные углы α. Так как треугольник MON прямоугольный, то угол MNO равен $90° - \alpha$. Применяя опять закон отражения света, получаем, что луч MN и отражённый луч NT составляют с прямой OB равные углы. Обращаясь к рисунку 433, мы видим, что $\angle SMN = 180° - 2\alpha$, $\angle MNT = 180° - 2\,(90° - \alpha) = 2\alpha$, поэтому $\angle SMN + \angle MNT = 180°$.

Следовательно, падающий луч SM и отражённый луч NT параллельны, что и требовалось доказать.

Простейший уголковый отражатель представляет собой несколько зеркал, составленных так, что соседние зеркала образуют угол в 90°. На рисунке 434 в виде ломаной линии схематически изображён такой отражатель. Представим себе, что на этот отражатель падает пучок параллельных лучей (на рисунке эти лучи изображены чёрными линиями со стрелками). Тогда отражённые лучи будут параллельны падающим лучам (эти лучи изображены цветными линиями со стрелками). Таким образом, уголковый отражатель «возвращает назад» падающий на него пучок параллельных лучей при любом расположении отражателя по отношению к падающему пучку лучей.

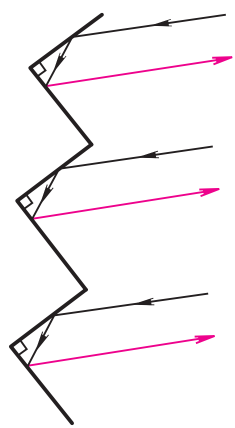


Рис. 434

Это свойство уголкового отражателя используется в технике. Так, уголковый отражатель устанавливается на заднем крыле велосипеда для того, чтобы «возвращать назад» свет автомобильных фар. Это даёт возможность водителю автомобиля видеть ночью велосипед с отражателем. Отметим, что уголковый отражатель, используемый на практике, устроен более сложно, чем описанный простейший, но принцип его действия тот же, что и у простейшего уголкового отражателя.

Уголковый отражатель был установлен на одной из отечественных автоматических станций, запущенных на Луну. С поверхности Земли участок Луны, на котором находилась автоматическая станция с уголковым отражателем, был освещён лучом лазера. Луч «вернулся» в то же место, где находился лазер. Измерив точное время от момента включения лазера до момента возвращения сигнала, удалось с весьма высокой точностью найти расстояние от поверхности Земли до поверхности Луны.

Ответы и указания

7 класс

Глава I

3. Три точки или одна точка. **4.** Четыре прямые. **6.** Три отрезка. **18.** Четыре угла. **20.** h и l. **21.** $OB < OA$; $OC > OA$; $OB < OC$. **22.** а) Да; б) нет. **24.** $\angle AOC < \angle AOB$. **25.** а) Да; б) нет. **32.** Две точки. **33.** 10,3 см. **34.** а) 3,5 см; б) 36 мм. **35.** 25,5 см или 1,5 см. **36.** 9 см или 23 см. **37.** $BD = 47$ см, $DA = 17$ см. **38.** 480 км. **40.** а) $AC = 1$ см, $CB = 1$ см, $AO = 0{,}5$ см, $OB = 1{,}5$ см; б) $AB = 6{,}4$ м, $AC = 3{,}2$ м, $AO = 1{,}6$ м, $OB = 4{,}8$ м. **41.** а) 10,5 см; б) 1,5 см. **42.** $\frac{a}{2}$. **43.** 4 см. **48.** Нет. Построение выполнимо, когда $\angle AOB$ острый или прямой. **49.** Да. **51.** а) 121°; б) 121°2′. **52.** 48°. **53.** 85°. **54.** 81°. **55.** 60°. **56.** 160°. **57.** Нет. **62.** а) 69°; б) 90°; в) 165°. **63.** Прямой. **64.** Да. **65.** а) 70° и 110°; б) 150° и 30°; в) 113°39′ и 66°21′; г) 135° и 45°; д) 100° и 80°. **66.** 106°. **67.** Да. **68.** а) $\angle 1 = \angle 3 = 63°$, $\angle 4 = 117°$; б) $\angle 1 = 43°27'$, $\angle 2 = \angle 4 = 136°33'$. **69.** а) 57°, 57°, 123°, 123°; б) 40°, 40°, 140°, 140°. **70.** а) $\angle 2 = \angle 4 = 110°$, $\angle 1 = \angle 3 = 70°$; б) $\angle 1 = \angle 3 = 45°$, $\angle 2 = \angle 4 = 135°$; в) $\angle 1 = \angle 3 = 75°$, $\angle 2 = \angle 4 = 105°$. **71.** 180°. **72.** $\angle AOC = 120°$, $\angle BOD = 130°$, $\angle COE = 110°$, $\angle COD = 60°$. **73.** Нет. **75.** Шесть прямых. **76.** Шесть точек. **77.** Двенадцать углов. **78.** а) 8 см; б) 16 см. **79.** 16 см или 4 см. **80.** а) $\frac{7}{8}a$; б) $\frac{5}{8}a$. **81.** а) $\frac{2}{3}m$; б) $\frac{4}{5}m$. **82.** 12 см. **83.** Указание. Рассмотреть два возможных случая: точки B и C лежат по разные стороны или по одну сторону от точки A. **84.** 85° или 15°. **85.** 30° или 90°. **86.** а) 67°30′ и 112°30′; б) 72°30′ и 107°30′. **87.** 90°. **89.** *Указание*. Доказать, что угол ABD развёрнутый. **90.** Указание. Предположить, что прямые m и n совпадают, и воспользоваться утверждением п. 12. **91.** Указание. Площадь прямоугольника равна произведению длин смежных сторон.

Глава II

95. 75 см. **96.** 12,7 см и 17,3 см. **97.** Нет. **98.** б) 42°, 47°. **99.** б) $BD = 5$ см, $AB = 15$ см. **100.** б) $AB = 14$ см, $BC = 17$ см. **101.** б) 110°. **110.** б) 46°. **111.** б) 96°. **112.** 10 см, 20 см и 20 см. **113.** $AB = 12{,}5$ см и $BC = 15$ см. **114.** 8 см. **117.** 50°. **118.** б) 37°30′. **120.** $\angle A = \angle B + \angle C$. **124.** $KF = 8$ см, $\angle DEK = 86°$, $\angle EFD = 90°$. **126.** б) $BC = 15$ см, $CO = 13$ см. **127.** б) $AB = 11$ см, $BC = 19$ см. **131.** 13 см. **141.** 25°. **147.** Указание. Рассмотреть два случая, когда точка B лежит: а) на луче AO; б) на продолжении луча AO. **150.** 90°. **151.** 29 см. **154.** Нет. **155.** Нет. **157.** Указание. Сначала построить биссектрису угла AOB. **160.** Указание. Сначала построить прямой угол. **161.** $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, $BC = 6$ см. **162.** 7 см, 5 см и 5 см. **163.** 10 см или 6 см. **165.** б) Указание. Пусть M — точка, равноудалённая от точек A и B и не лежащая на прямой AB. Воспользоваться утверждением: медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой. **170.** б) Указание. Сначала доказать, что $\angle AOK = \angle BOK_1$. **171.** Указание. Воспользоваться задачей 170. **172.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников DBF, FCE и EAD. **173.** 40°. **174.** Указание.

Доказать, что $\triangle ABO = \triangle FEO$. **175.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$. **176.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников ABC и ADC. **177.** Указание. Сначала доказать равенство треугольников ABC и ABD. **178.** Указание. Пусть угол BAD — смежный с углом A треугольника ABC. Для доказательства неравенства $\angle BAD > \angle B$ отметить середину O стороны AB и на продолжении отрезка CO отложить отрезок OE, равный CO. Затем доказать, что угол BAE равен углу B треугольника ABC и воспользоваться неравенством $\angle BAD > \angle BAE$. **179.** Указание. Наложить треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$, так, чтобы сторона BC совместилась со стороной B_1C_1, а сторона BA наложилась на луч BA_1. Для доказательства того, что точка A совместится с точкой A_1, воспользоваться задачей 178*. **180.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle AOD = \triangle BOC$, а затем, что $\triangle EBD = \triangle EAC$. **181.** Указание. Рассмотреть треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, где точки D и D_1 такие, что M и M_1 — середины отрезков AD и A_1D_1. **183.** Указание. Пусть точка B лежит на отрезке AC. Предположить, что $AD = BD = CD$. Используя свойство углов при основании равнобедренного треугольника, сначала доказать, что $\angle ABD = \angle CBD = 90°$. **184.** Указание. Сначала доказать, что $BP = CQ$. **189.** Указание. Воспользоваться задачей 165.

Глава III

201. Одну прямую. **202.** Три или четыре. **203.** Да. **206.** 105°, 105°. **207.** $a \parallel c$. **208.** б) Четыре угла по 55°, четыре других угла по 125°. **210.** 92°. **211.** а) Да; б) да. **212.** а) Нет; б) да. **213.** 115° и 65°. **214.** $\angle 1 = 135°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 135°$. **215.** Указание. Рассмотреть продолжение луча CP_3. **220.** 59°. Указание. Сначала доказать, что $a \parallel b$. **221.** 48°, 66°, 66°. **223.** Да. **224.** Указание. Доказать методом от противного. **225.** Указание. Доказать методом от противного. **226.** Указание. Сначала доказать, что $AM \parallel BC$ и $AN \parallel BC$.

Глава IV

228. а) 58°; б) 26°; в) $180° - 3\alpha$; г) 60°. **229.** $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. **232.** а) 36°, 72° и 72°; б) 45°, 45° и 90°. **233.** а) 40°, 40° и 100° или 40°, 70° и 70°; б) 60°, 60° и 60°; в) 100°, 40° и 40°. **234.** 105°. **235.** 103°. **236.** Указание. Воспользоваться свойством углов при основании равнобедренного треугольника. **237.** Да. **238.** Указание. Учесть, что внешний угол при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, в 2 раза больше угла при основании. **239.** 57°30′, 57°30′, 65° или 65°, 65°, 50°. **240.** 73°20′, 73°20′ и 33°20′. **253.** а) Нет; б) нет. **254.** Сторона, равная 10 см. **255.** а) 7 см; б) 8 см; в) 10 см. **257.** 29 см и 29 см. **258.** 7 см, 7 см и 11 см. **259.** 45°, 45° и 90°. **260.** 27°. **261.** 17,6 см. **262.** $AC = 6$ см, $AB = 12$ см. **263.** 9 см. **264.** 18 см. **265.** 30°, 30° и 120°. **266.** Указание. Воспользоваться первой теоремой п. 36. **267.** Указание. Воспользоваться признаками равенства прямоугольных треугольников. **268.** 70°, 70° и 40°. **269.** 122°. **270.** 90°, 39° и 51°. **272.** Указание. Сначала доказать, что углы, прилежащие к равным сторонам данных треугольников, равны. **274.** Указание. Воспользоваться задачей 273. **275.** Указание. Сначала провести биссектрису угла и воспользоваться задачей 138. **279.** 8 см. **280.** 12 см. **281.** 14 см. **283.** Указание. Сначала доказать, что CM — медиана треугольника ABC. **285.** 2 см или 8 см. **286.** 3 см. **287.** Указание. Через одну из точек, удовлетворяющих условию задачи, провести прямую, параллельную данной, и доказать, что любая другая точка, удовлетворяющая условию задачи, лежит на этой прямой. **288.** Луч с началом на стороне BA, параллельный стороне BC. Указание. Воспользоваться задачей 287. **289.** Прямая, параллельная данным прямым и находящаяся на равных расстояниях от них. **290.** Указание. Воспользоваться задачей 289. **291.** Две прямые, параллельные данной прямой и расположенные на данном расстоянии по разные стороны от неё. **293.** Указание. Воспользоваться задачей 292. **307.** $20°$. **308.** Указание. Доказательство провести методом от противного. **310.** Указание. а) Допустить, что $HM_1 \neq HM_2$, и воспользоваться задачей 309; б) допустить, что $HM_1 > HM_2$ или $HM_1 = HM_2$, и воспользоваться задачей 309. **311.** Указание. Продолжить медиану AM за точку M на отрезок MD, равный AM, и рассмотреть треугольник ABD. **312.** Указание. Пусть N — точка пересечения прямой BM и отрезка AC. Применить теорему о неравенстве треугольника к треугольникам ABN и MNC. **313.** Воспользоваться предыдущей задачей. **317.** 18,5 см. **321.** Указание. Пусть в треугольнике ABC $AC > AB$, а AM — данный отрезок. Учесть, что в треугольнике ACM $\angle C < \angle M$. **322.** Указание. Пусть $\triangle ABC$ — искомый, BM — его данная медиана. Сначала построить $\triangle BB_1C$, в котором точка M — середина стороны BB_1. **323.** б) Указание. Построить угол, равный данному, а затем воспользоваться задачей 292. **324.** а) Указание. Воспользоваться свойством 3 п. 35 и задачей 323, в. **325.** Указание. Воспользоваться задачей 290. **326.** Указание. Воспользоваться задачей 250. **327.** Указание. На сторонах BC и AB построить точки A_1 и C_1, так, чтобы $BA_1 = AC_1 = CB_1$. **328.** Указание. Если данные отрезки не равны друг другу, то сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной биссектрисе, а катет — данной высоте. **329.** Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна данной медиане, а катет — данной высоте. **330.** Указание. Сначала построить биссектрису угла C.

Глава V

331. Две прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых. **332.** Прямая, параллельная данным прямым и находящаяся на равных расстояниях от них. **333.** Указание. Воспользоваться следствием 1 п. 40. **334.** Указание. Воспользоваться следствием 1 п. 39. **335.** Указание. Воспользоваться теоремой о биссектрисе угла п. 39. **336.** Указание. Пусть AB — диаметр, а AC — хорда окружности с центром O. Рассмотреть равнобедренный треугольник AOC и воспользоваться неравенством треугольника. **337.** Указание. Доказать методом от противного, используя задачу 336. **338.** Указание. Воспользоваться свойством 2 п. 41 и теоремой о внешнем угле треугольника. **339.** Указание. Воспользоваться свойством 2 п. 41 и теоремой о внешнем угле треугольника. **341.** Указание. Воспользоваться равенством соответственных элементов в двух равных равнобедренных треугольниках, основаниями которых являются данные хорды. **343.** Указание. Воспользоваться признаком касательной (п. 42). **344.** 7 см. **345.** Указание. Воспользоваться свойством касательной к окружности (п. 42) и признаком параллельности двух прямых. **346.** 12 см. **348.** Указание. Воспользоваться свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки (п. 42). **349.** $30°$.

350. 120°. **351.** Указание. Сначала доказать, что $\angle ADC = 30°$. **352.** 60°. **353.** 60°. **354.** 30°, 30°. **355.** 5 см. **357.** 4 см. **358.** Указание. Сначала построить прямую, проходящую через центр окружности и перпендикулярную к данной прямой. **360.** Указание. Воспользоваться свойством 2 п. 41 и задачей 291. **361.** Указание. Воспользоваться свойством 4 п. 35 и задачей 360. **363.** Указание. Воспользоваться теоремой об окружности, описанной около треугольника (п. 43). **365.** Указание. Воспользоваться теоремой об окружности, вписанной в треугольник (п. 43). **369.** Указание. Воспользоваться свойством 4 п. 35. **370.** 10 см. **371.** 60 см. **372.** $m - c$. **375.** Указание. Отметить две точки на прямой l и воспользоваться задачей 374. **381.** а) Две оси; б) бесконечно много осей; в) одну ось; г) одну ось, если угол неразвёрнутый, и две оси, если развёрнутый. **384.** а) M; б) C. **385.** а) Нет; б) да; в) нет. **386.** 2 см. **387.** $AB = A_1B_1 = 19{,}5$ см. **388.** $AB = A_1B_1 = 10$ см. **389.** а) Да; б) нет. **390.** $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$; отрезки MN и M_1N_1. **391.** 18,1 см. **392.** 19 мм. **394.** Указание. Доказать методом от противного. **395.** Указание. Учесть, что $BM = MX$ и $CN = NX$. **396.** Указание. Пусть K — точка пересечения общей касательной, проходящей через точку M, и прямой AB. Сначала доказать, что $KA = KM = KB$. **398.** Нет. **399.** Указание. Использовать серединный перпендикуляр к той стороне, к которой проведена медиана. **401.** Указание. Использовать серединный перпендикуляр к отрезку AB. **402.** Указание. Воспользоваться задачей 289. **403.** Указание. Учесть, что точки, симметричные различным точкам относительно оси симметрии, различны. **406.** 72°. **407.** Указание. Воспользоваться теоремой о диаметре, перпендикулярном хорде (п. 41). **408.** Указание. Воспользоваться задачей 341. **409.** Указание. Сначала доказать, что если треугольник имеет ось симметрии, то он равнобедренный (см. задачу 393). **410.** Указание. Построить точку, симметричную точке пересечения прямых a и b относительно прямой p.

Задачи повышенной трудности

413. $ab = 1$. **414.** $\frac{n}{m}$. **415.** Указание. Воспользоваться свойством смежных углов: $\angle hk + \angle hl = 180°$. **416.** 180°. **417.** Указание. Пусть три из данных прямых проходят через точку A. Используя метод от противного, доказать, что каждая из оставшихся трёх прямых проходит через эту точку. **418.** Указание. Пусть три из данных точек лежат на данной прямой d. Используя метод от противного, доказать, что каждая из оставшихся четырёх точек лежит на прямой d. **419.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle AOC_1 = \triangle BOC_2$, где O — середина отрезка AB. **420.** Указание. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Продолжить стороны AB и A_1B_1 на отрезки $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C_1$ и рассмотреть треугольники ADC и $A_1D_1C_1$. **421.** Могут. Например, равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и треугольник ABD, где D — такая точка на стороне BC, что $AB = AD$. **422.** Могут. Рассмотрим, например, равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и отметим какую-нибудь точку D на продолжении стороны AB. Тогда треугольники ADC и DBC обладают указанным свойством, но не являются равными. **423.** Указание. Воспользоваться задачей 179. **424.** $90° - \frac{\alpha}{2}$. **426.** а) Остроугольный; б) остроугольный. **427.** Указание. Воспользоваться соотношениями между сторонами и углами треугольника и теоремой о сумме углов треугольника. **428.** 70°. Указание. Пусть O — точка пересечения биссектрисы угла A и прямой BM. Сначала доказать равенство треугольников AOC и MOC. **429.** Указание. Соединить один из концов отрезка с вершиной треугольника и воспользоваться задачей 321. **430.** Указание. Воспользоваться задачей 178, а также соотношениями между сторонами и углами треугольника. **431.** Указание. Продолжить отрезок AD до пересечения с BC и воспользоваться задачей 321. **432.** Указание. Отметить на стороне AB такую точку C_1, что $AC_1 = AC$, и рассмотреть треугольник BC_1D. **433.** Указание. Доказать методом от противного. **434.** Указание. Пусть ABC — данный треугольник, $AB > BC$, BM — медиана. Отметить такую точку E, что M является серединой отрезка BE, и рассмотреть треугольник ABE. **435.** Указание. Воспользоваться задачей 178. **436.** Указание. Продолжить отрезок BA на отрезок $AD = AC$ и, рассмотрев $\triangle DHB$, воспользоваться неравенством треугольника. **437.** Указание. Воспользоваться задачей 432. **438.** Указание. Воспользоваться задачами 434 и 437. **440.** Указание. Пусть в треугольнике ABC медиана AM и высота AH делят угол A на три равных угла BAH, HAM и MAC. Провести перпендикуляр MD к стороне AC и доказать сначала, что $MD = \frac{1}{2}MC$. **441.** Указание. Учесть, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. **444.** Указание. Сначала построить треугольник OAD, в котором $AD = R$ и $OD = 2R$, где R — радиус данной окружности. **445.** Указание. Пусть даны острый угол A, высота BH искомого треугольника ABC и отрезок PQ, равный его периметру. Построить сначала $\triangle ABH$, а затем такую точку D на луче AH, что $AD + AB = PQ$. **446.** Указание. Построить сначала треугольник, у которого сторона равна данному периметру, а углы, прилежащие к ней, равны половинам данных углов. **447.** Нет. Указание. Воспользоваться теоремой п. 40. **448.** Два, одно или ни одного. Указание. Воспользоваться теоремой п. 40. **449.** Задача имеет одно решение, если данные точки не лежат на одной прямой, и не имеет решения, если эти точки лежат на одной прямой. Указание. Воспользоваться следствием 2 п. 40. **450.** Четыре, три, два, одно или ни одного. Указание. Воспользоваться задачей 331. **451.** Четыре. Указание. Воспользоваться задачей 331. **452.** Указание. Пусть BC, $AC + AB$, $\angle B - \angle C$ — данные элементы искомого треугольника ABC. На продолжении стороны CA за точку A отложить отрезок AA_1, равный отрезку AB. Построить сначала $\triangle CBA_1$. **453.** Указание. Пусть окружности касаются в точке М. Рассмотреть их общую касательную d, проходящую через точку M, и доказать симметричность отрезков AO_2 и BO_1 относительно оси d. **454.** Указание. Пусть AB — общая касательная двух окружностей с центрами O_1 и O_2, R и r — их радиусы, причём $R > r$. Для окружностей, лежащих по одну сторону от прямой AB, рассмотреть точку K на радиусе O_1A такую, что $AK = r$. Воспользоваться задачей 291 и показать, что $\angle O_1KO_2 = 90°$. Тогда точка K принадлежит геометрическому месту точек из которых отрезок O_1O_2 виден под прямым углом и $O_1K = R - r$. Для окружностей, лежащих по разные стороны от прямой AB, рассмотреть точку K на луче O_1A такую, что $AK = r$, причём точка A лежит между точками O_1 и K. Тогда точка K принадлежит геометрическому месту точек из которых отрезок O_1O_2 виден под прямым углом и $O_1K = R + r$. **455.** Указание. Воспользоваться задачей 332. **456.** Указание. Воспользоваться определением окружности, следствием 1 п. 40 и теоремой о свойстве касательной к окружности (п. 42). **457.** Указание. Пусть дана окружность с центром C и радиусом r. Рассмотреть прямую m_1 и точку A_1 на прямой m_1, отстоящие на расстояние r от данных прямой m и точки A. Построить окружность с центром O, которая проходит через точку C и касается прямой m_1 в точке A_1 (см. задачу 456). Искомая окружность имеет тот же центр O, а её радиус отличается на r от радиуса построенной окружности. **459.** Указание. Построить точки M и K, симметричные точке A относительно сторон данного угла. Доказать, что точки пересечения прямой MK со сторонами угла — искомые. **460.** Указание. Учесть, что центр искомой окружности равноудалён от вершины прямого угла и гипотенузы. **461.** Указание. Пусть O — центр данной окружности, KM — искомая хорда, проходящая через точку A, X — точка на хорде такая что $KX = AM$. Сначала доказать, что $AX = PQ$ и $OX = OA$.

8 класс

Глава VI

463. а) 540°; б) 720°; в) 1440°. **464.** а) 5; б) 54; в) 275. **465.** а) четыре; б) три; в) шесть; г) пять. **466.** 23 мм, 20 мм, 19 мм, 18 мм. **467.** 15 см, 7 см, 23 см, 21 см. **468.** 90°. **469.** 75°. **470.** 30°, 60°, 120°, 150°. **472.** а) 10,5 см, 13,5 см; б) 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см. **474.** 78 см. **475.** 56 см или 70 см. **476.** а) $\angle B = \angle D = 96°$, $\angle C = 84°$; б) $\angle A = \angle C = 117°30'$, $\angle B = \angle D = 62°30'$; в) $\angle A = \angle C = 71°$, $\angle B = \angle D = 109°$; г) $\angle A = \angle C = 120°$, $\angle B = \angle D = 60°$; д) $\angle A = \angle C = 53°$, $\angle B = \angle D = 127°$. **477.** $MN = PQ = 6$ см, $NP = QM = 8$ см, $\angle M = \angle P = 60°$, $\angle N = \angle Q = 120°$. **479.** Указание. Сначала доказать, что $BK = DM$. **480.** Указание. Воспользоваться признаком 2°, п. 49. **482.** Указание. Воспользоваться признаком 3°, п. 49. **483.** Указание. Воспользоваться признаком 2°, п. 49. **484.** Указание. Рассмотреть $\triangle ABC$ с основанием AB и средней линией MN (M — середина AC, N — середина BC). На прямой MN за точку N отложить отрезок ND, равный отрезку MN, доказать равенство треугольников MNC и DNB. **487.** $2a$. Указание. Воспользоваться задачей 486. **489.** Указание. Через середину боковой стороны провести прямую, параллельную основаниям, и воспользоваться задачей 488. **490.** $\angle B = 144°$, $\angle D = 63°$. **491.** Указание. а) Через один из концов меньшего основания провести прямую, параллельную боковой стороне. **492.** Указание. а) Воспользоваться указанием к задаче 491, а; б) через один из концов меньшего основания провести прямую, параллельную диагонали. **493.** 68°, 112°, 112°. Указание. Воспользоваться задачей 491, а. **494.** Указание. Приложить плитки друг к другу так, чтобы боковые стороны совпали, меньшее основание плитки лежало на одной прямой с бóльшим основанием другой плитки. **495.** а) 6 см; б) 5 см; **497.** Три. **498.** Указание. Воспользоваться задачей 292. **504.** а) 198,1 см или 122,6 см; б) 23,4 дм или 19,8 дм. **506.** 18 см. **507.** а) 60° и 120°; б) 30° и 60°. **508.** 42 см. **509.** 22°30′ и 67°30′. **512.** а) Нет; б) нет; в) да. **514.** 24 см. **521.** Пересекает сторону CD; 9 см и 5 см. **522.** 3 см, 4 см, 3 см. **524.** Указание. Воспользоваться задачей 503. **526.** Указание. Воспользоваться теоремой о сумме углов выпуклого четырёхугольника и задачей 525. **527.** Указание. Через точку M провести прямую, параллельную BK, и воспользоваться задачей 488. **528.** Указание. Воспользоваться задачей 488. **529.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle BKD = \triangle BMD$. **531.** Указание. Воспользоваться задачей 485. **532.** 36,8 см. Указание. Использовать диагональ BD. **533.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABH = \triangle AMH$. **534.** 8 см. Указание. Воспользоваться задачей 492, а. **535.** Указание. Через середину меньшего основания провести прямые, параллельные боковым сторонам, и воспользоваться 4° п. 35. **536.** Указание. Пусть EF — отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из вершины A треугольника ABC. Рассмотреть точку D, симметричную точке A относительно стороны BC, и доказать, что $\triangle ABD = \triangle EAF$. **537.** Указание. Воспользоваться тем, что биссектриса равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является его осью симметрии. **539.** Бесконечное множество. **540.** Указание. Пусть a и b — взаимно перпендикулярные оси симметрии фигуры и O — точка их пересечения. Сначала доказать, что если точки M и M_1 симметричны относительно прямой a, а M_1 и M_2 симметричны относительно прямой b, то M и M_2 симметричны относительно точки O.

Глава VII

543. Указание. Пусть O — точка пересечения отрезков AM и BC. Сначала доказать равенство треугольников ABO и MCO. **544.** Указание. Провести перпендикуляр EF к прямой BC и сначала доказать равенство треугольников ABM и EFM, DCN и EFN. **545.** 1) 1,44 см²; б) $\frac{9}{16}$ дм²; в) 18 м². **546.** а) 4 см; б) 1,5 дм; в) $2\sqrt{3}$ м. **547.** а) 2400 мм²; б) 0,24 дм². **548.** а) 27,2 см²; б) $6\sqrt{2}$ см²; в) 21,4 см; г) 2,7 см. **549.** а) Увеличится в 2 раза; б) увеличится в 4 раза; в) не изменится. **550.** а) 25 см и 10 см; б) каждая сторона равна 3 м. **551.** 2200. **552.** 360. **553.** 12 м. **554.** Площадь участка квадратной формы больше на 900 м². **555.** а) 180 см²; б) 4 см; в) 18 см; г) 9. **556.** 156 см². **557.** 84 см². **558.** 18 см². **559.** 56,7 см². **560.** а) 10 см; б) 4 см; в) 12 см и 9 см. **561.** 12 см². **562.** 115,52 см². **563.** Площадь квадрата больше. **564.** а) 38,5 см²; б) $5\sqrt{3}$ см²; в) 5,4 см; г) $4\sqrt{2}$ см. **565.** 8 см. **566.** 5,625 см. **567.** а) 22 см²; б) 1,8 дм². **568.** 14 см и 24 см. **569.** а) 3; б) 252; в) 7. **570.** 48 см². **571.** Указание. Воспользоваться теоремой п. 37. **572.** Площади треугольников равны. **573.** Указание. Сначала разделить сторону BC на три равные части. **574.** а) 224 см²; б) 4,6 дм². Указание. Учесть, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны. **575.** 6 см и 9 см. **577.** а) 2 см²; б) 2,4 см. Указание. Воспользоваться второй теоремой п.58. **578.** а) 133 см²; б) 24 см²; в) 72 см². **579.** 54 см². **580.** 4,76 см². **581.** а) 10; б) $\sqrt{61}$; в) $\frac{5}{7}$; г) 16. **582.** а) 5; б) $4\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{3}$; г) 2; д) 2. **583.** $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. **584.** а) 12; б) 2; в) 8. **585.** 15 см. **586.** а) $3\sqrt{3}$ см; б) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **587.** а) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ см²; б) $0{,}36\sqrt{3}$ см²; в) $2\sqrt{3}$ дм². **588.** а) 10 см и 48 см²; б) $6\sqrt{3}$ см и $27\sqrt{3}$ см²; в) $7\sqrt{2}$ см и 49 см². **589.** а) $4\frac{8}{13}$; б) 9,6. **590.** 8 см, 9,6 см, 9,6 см. **591.** 13 см и 120 см². **592.** 96 см² и 16 см. **593.** а) 180 см²; б) $48\sqrt{3}$ см²; в) 135 см². **594.** $\sqrt{7}$. **595.** 5 см. **596.** а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) нет;

ж) да. **597.** а) 6,72 см; б) $7\frac{1}{17}$ см. **606.** а) 270 000 м^2; б) 0,27 км^2. **607.** $46\frac{2}{3}$ см^2. **608.** 20 см. **609.** 900 см^2. **610.** Указание. Воспользоваться тем, что перпендикуляр меньше наклонной. **611.** На сторонах BC и DC квадрата $ABCD$ нужно взять точки M и N так, чтобы $BM = \frac{2}{3}BC$, $DN = \frac{2}{3}DC$, и провести прямые AM и AN. **612.** Нет. Указание. Сравнить, например, площади треугольников со сторонами 13, 13, 24 и 12, 12, 12. **613.** Указание. Использовать метод ***вспомогательной площади***. Соединить точку на основании с вершиной, противолежащей основанию, и воспользоваться тем, что сумма площадей двух получившихся треугольников равна площади данного треугольника. **614.** Указание. Задача решается аналогично задаче 613. **615.** Указание. Доказать, что площадь каждого треугольника равна половине площади параллелограмма $AEDF$. **616.** а) и б) Площади треугольников равны. в) Указание. Воспользоваться задачей б) и второй теоремой п. 58. **617.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **618.** 60 м, 14,4 м. **619.** $10\frac{10}{17}$ см. **620.** а) $100\sqrt{3}$ см^2; б) 18 см^2. **621.** 320 см^2. **622.** 84 см^2. Указание. Доказать, что $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ — прямоугольные треугольники. **623.** а) 243 см^2; б) 529 см^2. **624.** h^2. **625.** a^2. **627.** 48 см^2. **628.** $(\sqrt{2}-1)a^2$. **629.** 30 см^2. **630.** $\frac{30}{7}$ см. **631.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ см^2. **632.** 48 см^2. **633.** 30 см^2. **634.** 80 см^2. **635.** $64\sqrt{3}$ см^2. **636.** 19,14 см^2. **637.** Указание. Воспользоваться теоремой Пифагора. **638.** а) 24; б) 24; в) 9; г) 12; д) 21.

Глава VIII

640. $\frac{3}{4}$; нет. **641.** а) Да; б) да; в) нет. **643.** а) 15 см; б) $10\frac{2}{3}$. **644.** $BD = 8$ см, $DC = 12$ см. **645.** $AB = 18$ см, $AC = 6$ см. **646.** $NE = 3{,}5$ см, $EK = 2{,}5$ см. **647.** $CD = 14$ см, $DE = 21$ см. **648.** Да. **649.** 8,4 см, 10,5 см, 14,7 см. **651.** 4,5 м. **652.** 175 см^2 и 252 см^2. **653.** 87,5 км^2. **655.** 2,5. **656.** 6 см, 8 см, 12 см. **657.** $x = 9$, $y = 21$. **658.** а) $EF = 5$ см, $FC = 3{,}5$ см; б) $DE = 5\frac{5}{7}$ см, $EC = 2\frac{2}{7}$ см. **659.** а) 10 см; б) $\frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}$; в) 12 см. **660.** а) Не всегда; б) да; в) да. **661.** 6 см и 6,5 см. **662.** а) 5 см, 5 см, 7,5 см, 7,5 см; б) все четыре стороны равны $\frac{ab}{a+b}$. **664.** а) 17,5 см; б) $BD = 5$ см, $DE = 6$ см; в) 8 см. **665.** Указание. Если прямые a и b не параллельны, то через точку A провести прямую, параллельную прямой b. **666.** Да. **667.** а) Да; б) да. **670.** $\frac{ah}{a+h}$. Указание. Воспользоваться задачей 650. **671.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$. Указание. Через точку D провести прямую, параллельную BK. **672.** 10 см. **673.** 5 см. **674.** 42 см. **675.** Указание. Сначала доказать, что середина боковой стороны трапеции лежит на прямой, проходящей через середины диагоналей. **676.** 6 см и 12 см. **677.** $3S$. **678.** а) $h=20$, $a=4\sqrt{41}$, $b=5\sqrt{41}$; б) $h=48$, $a=80$, $b=60$; в) $a=12\sqrt{3}$, $c=24$, $a_c=18$; г) $b=8\sqrt{3}$, $c=16$, $b_c=12$; д) $h=2\sqrt{5}$, $b=3\sqrt{5}$, $a_c=4$, $b_c=5$. **679.** $a_c=\frac{a^2}{c}$, $b_c=\frac{b^2}{c}$. **680.** У к а з а н и е. а) Воспользоваться формулой для вычисления площади треугольника. б) Воспользоваться задачей 679. **681.** 32 мм, 18 мм. **682.** 61 см. **683.** $1\frac{12}{13}$ см, $11\frac{1}{13}$ см. **685.** 3,15 м. **686.** 6,936 м. **687.** 6,12 м. **688.** 48 м. **689.** 72,25 м. **692.** У к а з а н и е. Сначала построить треугольник, подобный искомому. **693.** У к а з а н и е. См. указание к задаче 692. **694.** У к а з а н и е. См. указание к задаче 692. **695.** У к а з а н и е. См. указание к задаче 692. **696.** У к а з а н и е. См. указание к задаче 692. **699.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\frac{\sqrt{15}}{15}$. **700.** а) $\frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$, $90°-\beta$, $\frac{b}{\sin\beta}$; б) $\approx 8{,}39$ см, $40°$, $\approx 13{,}05$ см. **701.** а) $b\operatorname{tg}\alpha$, $90°-\alpha$, $\frac{b}{\cos\alpha}$; б) ≈ 11 см, $48°$, ≈ 16 см. **702.** $90°-\alpha$, $c\sin\alpha$, $c\cos\alpha$; $55°$, ≈ 14 см, ≈ 20 см. **703.** $\sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}$; ≈ 19, $\approx 38°39'$, $\approx 51°21'$. **704.** а) $b^2\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\frac{1}{4}a^2\operatorname{tg}\alpha$. **705.** $8\operatorname{tg}\alpha$ см². **706.** ≈ 74 м. **707.** $60°$, $120°$, $60°$, и $120°$. **708.** $60°$ и $30°$. **709.** ≈ 72 см². **710.** $A_1B_1=4{,}5$ см, $B_1C_1=6{,}75$ см. **712.** $\frac{7}{8}$. **713.** 18 см, 12 см. **714.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 642. **715.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 642. **716.** 16,8 см, 14 см, $7\frac{7}{9}$ см. **718.** $x=\frac{ab}{a+b}$. **719.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что: а) $\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$; б) $\triangle ABH \sim \triangle A_1B_1H_1$. **720.** $DC=2\frac{2}{3}$ см, $DB=2\sqrt{13}$ см, $CB=\frac{2}{3}\sqrt{61}$ см. У к а з а н и е. Сначала доказать, что $\triangle ADC \sim \triangle BAD$. **721.** $\frac{2ab}{a+b}$. **725.** У к а з а н и е. Пусть точка B лежит между C и D. К треугольникам ABD и ACD дважды применить следствие 2 из первой теоремы п. 58. **726.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 642. **727.** $\frac{ab}{2}\sin\alpha$. **728.** 60 см². **729.** $\angle C=150°$, $\angle D=30°$. **731.** 18 см². **732.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 642. **736.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей п. 69.

Глава IX

742. OA и AC. **744.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см. **745.** $12\sqrt{3}$ см. **749.** а) Да; б) нет; в) да. **750.** 3, 4, 5, 6, 7. **751.** 4. **752.** 16. **753.** 1, 2, 3, 4, 5. **755.** а) Две; б) три; в) четыре; г) одну; д) ни одной. **756.** а) $2r$, $60°$; б) r, $60°$. **757.** $3r$. **758.** У к а з а н и е. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей с радиусами R и r ($R \geqslant r$), $d=O_1O_2$. На луче O_1O_2

отложить отрезок $O_1K = R$ и доказать, что K принадлежит каждой из двух окружностей. Далее доказать, что все точки одной окружности являются внешними относительно другой окружности. **759.** Указание. Доказать, что все точки одной окружности являются внешними относительно другой окружности. **763.** а) 16; б) $16\sqrt{2}$; в) 32. **764.** 112° и 248°. **765.** $15\sqrt{3}$ см. **767.** а) 64°; б) 175°; в) 34°; г) 105°. **768.** 60° и 30° или 140° и 110°. **769.** 101° или 36°. **770.** 50°. **771.** а) $\angle A = 67°$, $\angle B = 23°$, $\angle C = 90°$; б) $\angle A = 55°$, $\angle B = 35°$, $\angle C = 90°$. **772.** $\angle A = 51°$, $\angle B = \angle C = 64°30'$ или $\angle A = 129°$, $\angle B = \angle C = 25°30'$. **773.** 20°20′, 34°50′. **775.** 36°. **776.** 44°. **777.** 62°. **783.** а) 45°; б) 45°; в) 60°; г) 135°; д) 45°; е) 45°; ж) 45°. **784.** 30 см. **787.** 60 см². **788.** 1,2 см. **791.** Указание. Воспользоваться свойством углов вписанного четырёхугольника. **792.** Указание. Воспользоваться задачей 774. **793.** Указание. Воспользоваться вторым утверждением п. 83. **794.** Указание. Воспользоваться тем, что центр окружности, вписанной в четырёхугольник, равноудалён от всех его сторон. **795.** Указание. Воспользоваться тем, что центр окружности, описанной около четырёхугольника, равноудалён от всех его вершин. **796.** Указание. Воспользоваться тем, что центр окружности принадлежит биссектрисам односторонних углов, образованных при пересечении данных параллельных прямых секущей. **797.** Указание. Построить общую касательную окружностей в точке A, пересекающую внешнюю касательную в точке P и доказать, например, что AP — медиана треугольника KAM, равная половине стороны KM. **798.** а) $\sqrt{d^2 - (R-r)^2}$; б) $\sqrt{d^2 - (R+r)^2}$. **801.** Указание. Рассмотреть углы треугольника CBD. Воспользоваться теоремой о вписанном угле (п. 80) и тем, что сумма градусных мер дуг AB данных окружностей не зависит от выбора прямой m. **802.** а) Указание. Сначала рассмотреть углы треугольника CBK и применить теорему 3 п. 81. Затем воспользоваться теоремой о вписанном угле (п. 80) и задачей 801. **803.** Указание. Сначала доказать, что угол ACD вдвое больше угла ABD и является внешним углом треугольника BCD. **805.** $\frac{2S}{5r}$, $\frac{S}{3r}$, $\frac{3S}{5r}$, $\frac{2S}{3r}$. **808.** $\frac{ab}{a+b}$. **809.** Указание. Воспользоваться свойством углов вписанного четырёхугольника. **811.** Указание. Воспользоваться задачей 810. **812.** Указание. Воспользоваться задачей 810. **813.** Сначала доказать, что около четырёхугольника $MHBC$ можно описать окружность. **814.** 5 см. **815.** Указание. Воспользоваться задачами 791 и 804. **816.** $\frac{\sqrt{ab}}{2}$. **817.** Указание. Использовать серединный перпендикуляр к отрезку AB. **818.** Указание. Воспользоваться задачей 289. **819.** Указание. Воспользоваться задачей 794. **820.** Указание. Пусть α и β — градусные меры двух противоположных углов данного четырёхугольника. Тогда $\alpha + \beta = 180°$. Сначала доказать, что градусные меры дуг вписанной в данный четырёхугольник окружности, заключённые внутри углов с этими градусными мерами, равны соответственно $180° - \alpha$ и $180° - \beta$. Далее воспользоваться теоремой 1 п. 81. **821.** Указание. Воспользоваться теоремой 1 п. 81. **822.** Указание. Воспользовавшись теоремой 1 п. 81, доказать, например, перпендикулярность хорд BB_1 и A_1C_1. **823.** Указание. Сначала доказать, например, равенство углов BCC_1 и BAA_1. Далее, используя равенство дуг, на которые опираются эти углы, обосновать равенство углов C_1B_1B и A_1B_1B.

Задачи повышенной трудности

824. Указание. Продолжив через одну стороны данного шестиугольника, получить равносторонний треугольник. **825.** Указание. Сначала доказать, что $a_1 + a_2 + a_3 = a_3 + a_4 + a_5 = a_5 + a_6 + a_1$. Затем построить равносторонний треугольник, сторона которого $a_1 + a_2 + a_3$, и воспользоваться задачей 824. **827.** Указание. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Учесть, что вершина C лежит внутри угла BAD, поэтому луч AC проходит внутри этого угла и, следовательно, пересекает отрезок BD. Аналогично рассмотреть луч BD и угол ABC. **828.** Указание. Если данный четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, то воспользоваться задачей 827. Если $ABCD$ — невыпуклый четырёхугольник и, например, прямая AB пересекает сторону CD в точке M, то рассмотреть два случая: A — точка отрезка MB и B — точка отрезка AM. **829.** $\frac{a}{4}$. Указание. Пусть P — точка пересечения прямых DE и AB, $DO \parallel AC$ и $O \in AB$. Сначала доказать, что APE, AOD, POD — равнобедренные треугольники. **830.** Указание. Сначала доказать неравенства $m_a < \frac{b+c}{2}$ и $m_a < \frac{b+c-a}{2}$, где a, b, c — стороны треугольника, m_a — медиана, проведенная к стороне a. **831.** Указание. Сначала доказать, что диагонали данного четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам. **832.** Прямая, параллельная данной прямой. **833.** Указание. Воспользоваться задачами 491, а и 492, а. **834.** Указание. Воспользоваться задачами 524 и 503. **835.** Указание. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — точки пересечения диагоналей квадрата, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA данного параллелограмма $ABCD$. Сначала доказать равенство треугольников AO_1O_4, BO_1O_2, CO_2O_3, DO_3O_4. **836.** Указание. На луче AB отложить отрезок AN, равный отрезку AM, провести отрезок MN и провести высоту NS треугольника AMN. Затем доказать, что $\triangle ANS = \triangle MAD$ и $\triangle AKB = \triangle NMS$. **837.** 90°. Указание. Пусть D_1 — точка, симметричная точке D относительно точки E. Сначала доказать, что $\triangle ACD_1$ — равнобедренный прямоугольный треугольник. **838.** 30°. Указание. На луче AM отложить отрезок $AK = AB$ и, рассмотрев $\triangle BKC$, доказать, что точка K совпадает с точкой M. **839.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle BKP = \triangle ABC = \triangle CQT$. **840.** Указание. Сначала построить равнобедренный треугольник, основание которого равно сумме оснований трапеции, а боковая сторона равна диагонали трапеции. **841.** Указание. Воспользоваться задачей 393. **842.** Указание. Воспользоваться равенством треугольников ABC и ADC, APM и ATM, MQC и MRC. Для доказательства обратного утверждения предположить, что точка M не лежит на AC, и доказать, что тогда площади параллелограммов не равны. **843.** $\frac{S_1S_3(S_1 + S_2)(S_2 + S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1S_3)}$. Указание. Воспользоваться следствием 2 п. 58. **844.** $\left(\sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2}\right)^3$. Указание. Воспользоваться второй теоремой п. 58. **845.** $\frac{1}{5}$. **846.** Указание. Пусть AB — боковая сторона, а M — середина другой боковой стороны трапеции $ABCD$. Сначала доказать, что $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. **847.** $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$. Указание. Сначала доказать, что $S_{AOB} = S_{COD} = \sqrt{S_1S_2}$. **848.** Указание. Сначала доказать, что площадь параллелограмма, стороной которого является меньшее основание трапеции, равна сумме площадей двух треугольников, прилежащих к этому основанию и к боковым сторонам трапеции. **849.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что $S_{AKM} = S_{CMK}$ и $S_{BKM} = S_{DMK}$. **850.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что $S_{ABD} = S_{EDC}$ и $S_{BDK} = S_{CDK}$. **851.** У к а з а н и е. В каждом из трёх получившихся четырёхугольников провести диагонали так, чтобы никакие две диагонали не имели общего конца, и доказать, что площадь каждого из двух средних треугольников равна полусумме площадей соответствующих крайних треугольников. **852.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что $S_{AMB} = S_{ADK} + S_{KCB}$.

853. $2\sqrt{\dfrac{a^2 + ab + b^2}{3}}$. У к а з а н и е. Пусть AB и AD — перпендикуляры, проведённые к прямым, содержащим стороны данного угла O, а C — точка пересечения прямых AB и OD. Рассмотреть прямоугольные треугольники ADC и OBC. **854.** $2\sqrt{S_1S_2}$. У к а з а н и е. Учесть, что треугольники BKC и MCD имеют по равному углу, и воспользоваться второй теоремой п. 58. **855.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что площади треугольников BTC и ETC равны. **856.** $\dfrac{\alpha}{2}$. У к а з а н и е. Сначала доказать, что площади треугольников DCK и DCM равны, а затем доказать, что $KM \parallel DC$. **857.** $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$. У к а з а н и е. Через точку M провести прямые, параллельные сторонам прямоугольника, и рассмотреть образовавшиеся прямоугольные треугольники. **858.** У к а з а н и е. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $BD = h$. Используя теорему Пифагора, доказать, что $MB = KB = \sqrt{a^2 + c^2 - h^2}$. **859.** У к а з а н и е. Провести перпендикуляры OM и ON к сторонам AC и CB и доказать, что $OM = \dfrac{1}{3}CB$, $ON = \dfrac{1}{3}AC$. Далее воспользоваться теоремой Пифагора для треугольников AOM, BON и COM. **860.** б) У к а з а н и е. Сначала доказать, что $DF = DE$ и $AF = FE$. Затем воспользоваться подобием треугольников AED и AFE. **861.** У к а з а н и е. Пусть AK — биссектриса треугольника ABC и, например, $AC > AB$. Пользуясь задачей 642, сначала доказать, что точка M лежит между точкам K и C. Затем воспользоваться задачей 663. **862.** У к а з а н и е. Воспользоваться утверждением: отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный этому треугольнику. **863.** У к а з а н и е. Сначала доказать, что $\triangle MBC \sim \triangle MFK$ и $\triangle MAC \sim \triangle MEK$, где M — точка пересечения прямых CK и AB. **864.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. У к а з а н и е. Пусть ABC — данный треугольник, а D — точка пересечения диагоналей квадрата, построенного на гипотенузе BC. На продолжении луча CA отметить точку E так, чтобы $\angle CDE = \angle ADB$. Сначала доказать, что $\triangle ABD = \triangle ECD$. **865.** У к а з а н и е. Пусть BD и CE — биссектрисы треугольника ABC. Сначала доказать, что $\angle C = 2\angle B$, $\angle B = 2\angle A$, а затем доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ и $\triangle ABC \sim \triangle ACE$. **866.** У к а з а н и е. Пусть E и F — точки пересечения MP и MQ с OB и OA. Воспользоваться подобием треугольников OPR и OFQ, OQS и OEP для доказательства того, что треугольники OEF и ORS подобны. **867.** У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что AH — медиана треугольника, подобного треугольнику BDH. **868.** У к а з а н и е. а) Рассматривая подобные треугольники, сначала доказать, что $AD^2 = AC \cdot AE$, $DB^2 = BC \cdot BF$

и $CD^2 = AD \cdot DB$. б) Применить теорему Пифагора к треугольникам AED и DFB. в) Воспользоваться подобием треугольников AED и ACB. **869.** а) $\angle A = 75°$, $\angle B = 135°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 90°$. б) Указание. Учесть, что треугольники ABP и DAB подобны. **870.** Указание. Воспользоваться задачей 486. **871.** Указание. Пусть MN — отрезок, соединяющий середины сторон AD и BC данного четырёхугольника $ABCD$. Отметить точку D_1, симметричную точке D относительно точки N, и рассмотреть $\triangle ABD_1$. **872.** Указание. Воспользоваться задачей 871. **873.** Указание. Воспользоваться задачей 871. **874.** Указание. Воспользоваться теоремой о средней линии треугольника, свойством 4 п. 35 и задачей 833. **875.** Указание. Продолжить перпендикуляры AM и AK до пересечения с прямой BC в точках D и E и сначала доказать, что MK — средняя линия треугольника DAE. **876.** Указание. Воспользоваться задачей 531. **877.** Указание. Воспользоваться задачей 876. **878.** Указание. Пусть точка N — середина AC. Доказать сначала, что треугольники MBC и MNC равны и BN — средняя линия треугольника AKC. Далее воспользоваться следствием 2, п. 58. **879.** Указание. Через концы одной из медиан треугольника ABC провести прямые, параллельные двум другим медианам, и воспользоваться тем, что образовавшийся при этом треугольник равен треугольнику EFG. **880.** $\frac{1}{5}$. **881.** Указание. Воспользоваться подобием треугольников MND и MAB, MAD и MPB. **882.** Указание. Пусть $ABCD$ — равнобедренная трапеция, X — искомая точка большего основания AD, а AB — данная боковая сторона. Сначала доказать, что $\frac{AX}{XD} = n$, и воспользоваться задачей 690. **883.** Указание. На произвольном луче с началом в точке A откладываем отрезок AC_1, равный отрезку AC, и на луче C_1A от точки C_1 — отрезок C_1B_1, равный отрезку CB (сделайте рисунок). Убедитесь в том, что прямая, проходящая через точку C_1, и параллельная прямой BB_1, пересекает прямую AB в искомой точке D. Задача не имеет решения, если C — середина отрезка AB. **884.** Указание. Сначала построить какой-нибудь равнобедренный треугольник по данному углу. **885.** Указание. Пусть ABC — искомый треугольник, у которого даны стороны AB, AC и биссектриса AD. На прямой AD отметить точку E так, чтобы $BE \parallel AC$. Воспользовавшись подобием треугольников ADC и EDB и задачей 642, построить сначала отрезок DE, а затем треугольник ABE по трем сторонам. **886.** Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник, подобный искомому треугольнику ABC. **887.** Указание. Пусть h_a, h_b, h_c — данные высоты. Воспользоваться тем, что стороны a, b и c искомого треугольника пропорциональны отрезкам h_a, h_b, и $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$. **888.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция, у которой известны $\angle A$, боковая сторона AB и большее основание AD. Сначала построить $\triangle ABD$, а затем $\triangle BCD$ по углу B, стороне BD и отношению двух сторон. **889.** Указание. Сначала выразить диагонали искомого ромба через сторону данного квадрата и данные отрезки. **890.** Указание. Сначала построить прямую BK, параллельную стороне AC треугольника ABC и пересекающую данную прямую m в точке K, и доказать подобие треугольников AC_1B_1 и BC_1K, а также KBA_1 и B_1CA_1. **892.** Указание. Сначала предположить, что прямая A_1C_1 пересекает прямую AC в точке B_2. Тогда для точек A_1, B_2 и C_1 справедливо утверждение задачи 890. Учитывая данное в условии равенство, получить $CB_2 : B_2A = CB_1 : B_1A$. Обозначив полученные отношения t, выразить AC двумя способами через AB_2 и AB_1 и обосновать совпадение точек B_1 и B_2. **893.** Указание. Пусть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M. Воспользоваться задачей 890 для треугольника ABB_1 и прямой CC_1, а также для треугольника CBB_1 и прямой AA_1, затем умножить одно равенство на другое. **894.** Указание. Пусть прямые AA_1 и CC_1 пересекаются в точке M, а прямые BM и AC — в точке B_2. Обосновать совпадение точек B_1 и B_2 (см. указание к задаче 892). **895.** Указание. Пусть A_1 и B_1 — точки пересечения прямых AE и BK соответственно со сторонами BC и AC треугольника ABC; $BC = a$, $AC = b$. Сначала доказать подобие треугольников AB_1K и CB_1B, а также треугольников BA_1E и CA_1A. Затем воспользоваться задачей 894 для треугольника ABC и прямых AA_1, BB_1 и AH. Учесть, что $BH : HA = a^2 : b^2$ (см. свойство 2 п. 71). **896.** Указание. Воспользоваться задачей 893 для треугольника ACC_1 и прямой BB_1, а также для треугольника BCC_1 и прямой AA_1. Выразить из них и сложить отношения $CA_1 : A_1B$ и $CB_1 : B_1A$. **897.** Указание. Воспользоваться задачами 896 и 642. **898.** Указание. Воспользоваться задачей 894 и свойством отрезков касательных к окружности, проведённых из одной точки (п. 42). **899.** Указание. Сначала воспользоваться свойством отрезков касательных к окружности, проведённых из одной точки (п. 42) и доказать, что длины отрезков от вершин треугольника до точек касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника равны $p - a$, $p - b$, $p - c$, где a, b, c — длины сторон треугольника и p его полупериметр. Затем воспользоваться задачей 894. **900.** Указание. Использовать общую касательную к данным окружностям. **901.** Указание. Сначала доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle BAD$. **902.** Указание. Воспользоваться теоремой 1 п. 81. **903.** Указание. Рассмотреть два случая: точка пересечения прямых лежит вне окружности и внутри окружности. В первом случае пусть S — точка пересечения прямых, содержащих равные хорды AB и CD окружности, причём точка B лежит на отрезке AS, а точка D — на отрезке CS. Воспользоваться задачей 764, а и следствием 1 п. 80 и доказать, что $\angle SAC = \angle SCA$. **904.** Указание. Доказать, что эта величина равна диаметру данной окружности. **905.** Указание. Из точек O_1 и O_2 провести перпендикуляры O_1H_1 и O_2H_2 к прямой BC и сравнить расстояние между параллельными прямыми O_1H_1 и O_2H_2 с длиной отрезка O_1O_2. **906.** Указание. Пусть CD является диаметром, перпендикулярным к диаметру AB данной окружности. Искомое множество точек состоит из двух окружностей, построенных на отрезках OC и OD как на диаметрах. **907.** $146°$ и $107°$. Указание. Сначала доказать, что точка M лежит на окружности с центром A радиуса AB. **908.** Указание. Сначала доказать, что проведённые прямые, которые образуют новый треугольник, являются биссектрисами внешних углов треугольника, и воспользоваться теоремой о биссектрисе угла (п. 39). **909.** Указание. Для того чтобы доказать, что A_1 лежит на описанной окружности, сначала надо установить равенство $\angle A_1CB = \angle BAA_1$. Точка A_2 симметрична точке A_1 относительно серединного перпендикуляра к стороне BC треугольника ABC, поэтому также лежит на описанной окружности. Аналогично для остальных точек. **910.** Указание. Пусть E — точка пересечения луча BD с окружностью, описанной около треугольника ABC. Воспользоваться подобием треугольников ABE и BCD. **911.** Указание. Сначала доказать, что OE — серединный перпендикуляр к отрезку AC. **912.** Указание.

Пусть $XC > XA$ и $XC > XB$. Отложить на отрезке XC отрезок XD, равный отрезку XA, учесть, что $\angle AXC = 60°$, и доказать равенство треугольников AXB и ADC. **913.** Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник. Провести диаметр BB_1 и сначала доказать, что $AB_1 = CD$. **914.** Указание. Через точку пересечения указанных биссектрис провести прямую параллельную AB, до пересечения с прямыми AD и BC в точках E и F и доказать, что $EF = DC$. **915.** Указание. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, описанная около окружности радиуса r, а $AD = a$, $BC = b$ — её основания. Сначала доказать, что $r = \frac{ab}{a+b}$. **916.** Указание. В четырёхугольнике $ABCD$ на диагонали AC взять такую точку K, что $\angle ABK = \angle CBD$, и далее использовать подобие треугольников ABK и DBC, BCK и ABD. **917.** Указание. Через центр M вписанной окружности провести диаметр PQ описанной окружности и сначала доказать, что $PM \cdot MQ = 2Rr$. **918.** Указание. Доказать, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на окружности с центром в середине отрезка OH радиуса $\frac{R}{2}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. **919.** Указание. Пусть ABC — данный треугольник, а H, K и M — основания перпендикуляров, проведённых из точки D описанной окружности к прямым AB, AC и BC. Допустим, что луч DK лежит внутри угла HDM. Сначала доказать, что $\angle AKH = \angle ADH = \angle MDC = \angle MKC$. **920.** Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры данных окружностей, а r_1 и r_2 — их радиусы, причём $r_1 > r_2$. Построить две окружности с центрами O_1 и O_2 радиусов соответственно $r_1 - r_2$, $r_1 + r_2$ и воспользоваться решением задачи 761. **921.** Указание. Сначала построить две окружности радиуса P_2Q_2 с центром M и радиуса OA с центром O, где A — середина какой-нибудь хорды данной окружности, равной отрезку P_1Q_1. Затем воспользоваться задачей 920. **922.** Указание. Сначала доказать, что наименьшей будет хорда, перпендикулярная к диаметру, проходящему через данную точку. **923.** а) Указание. Сначала построить какой-нибудь треугольник по данной стороне и противолежащему углу, затем описать около него окружность и воспользоваться следствием 1, п. 80. б) Указание. Пусть ABC — искомый треугольник, $\angle B$ — данный угол. На продолжении луча AC отложить отрезок $AA_1 = AB$, на продолжении луча CA — отрезок $CB_1 = BC$. Пользуясь задачей 923, а, сначала построить $\triangle A_1BB_1$. **924.** Указание. Пусть PQR — искомый треугольник, P — вершина, из которой проведены высота, биссектриса и медиана треугольника, а O — центр описанной около треугольника окружности. Учесть, что $BO \perp QR$. **925.** Четыре решения. Указание. Воспользоваться задачей 908.

9 класс

Глава X

930. В случае б). **932.** Скорость, сила. **933.** $|\vec{a}| = 3$ см, $|\overrightarrow{BC}| = 4$ см, $|\overrightarrow{DC}| = 3$ см, $|\overrightarrow{MC}| = \sqrt{18{,}25}$ см, $|\overrightarrow{MA}| = 1{,}5$ см, $|\overrightarrow{CB}| = 4$ см, $|\overrightarrow{AC}| = 5$ см. **934.** $|\overrightarrow{BD}| = 13$ см, $|\overrightarrow{CD}| = 5\sqrt{2}$ см, $|\overrightarrow{AC}| = 74$ см. **936.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **937.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **939.** а) Ромб; б) трапеция. **940.** а) да; б) да; в) нет; г) нет; д) да. **941.** Да. **948.** Указание. Воспользоваться неравенством треугольника. **950.** а) a; б) $a\sqrt{3}$; в) $a\sqrt{3}$; г) a; д) a. **951.** а) -2 и 10; б) 14 и 10; в) 14 и 10; г) -2 и 10. **952.** а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AM}$. **954.** $\overrightarrow{XY} = -\vec{a} + (-\vec{b}) + \vec{c} + \vec{d}$. **955.** в) $-\vec{b}$. **956.** $\overrightarrow{BM} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{NC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MN} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BN} = (\vec{b} - \vec{a}) - \vec{a}$. **957.** $\overrightarrow{BC_1} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{x} - \vec{y}$, $\overrightarrow{BA} = -\vec{y}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{x}$. **958.** а) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; б) $\overrightarrow{AC} = -\vec{a} - \vec{b}$; в) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}$. **959.** $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OC} = -\vec{a}$, $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DA} = -\vec{a} + \vec{b}$. **961.** Равенство $|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{x}| + |\vec{y}|$ справедливо, если $\vec{x} \uparrow\downarrow \vec{y}$ или хотя бы один из векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ нулевой. **962.** 60°. **969.** а) $4\vec{n}$; б) $\frac{5}{2}\vec{m} + \frac{3}{2}\vec{n}$; в) $-\frac{4}{3}\vec{m} - \frac{3}{2}\vec{n}$. **970.** $\overrightarrow{EC} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **971.** $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$. **972.** а) $\overrightarrow{AC} = \vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$, $\overrightarrow{CO} = -\frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$, $\overrightarrow{DO} = \frac{1}{2}(\vec{y} - \vec{x})$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\vec{x}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CO} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{y})$, $\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = -\vec{x} - \vec{y}$; б) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\vec{x}$, $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\vec{x} + \vec{y}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\vec{x} - \vec{y}$, $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{6}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$. **974.** $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. **975.** $-\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. **978.** Указание. Воспользоваться задачей 973. **981.** 10 см. **982.** 6,8 см и 10,2 см. **983.** 30 см. **984.** 16 см. **986.** 60°, 60°, 120°, 120°. **987.** 7 см. **989.** Указание. Если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ не коллинеарны, то воспользоваться правилом треугольника сложения векторов, и, если они коллинеарны — задачей 988. **990.** $-\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$. **991.** $\overrightarrow{XY} = -\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$, $\overrightarrow{MP} = -\vec{a} + \vec{b}$. **992.** $\overrightarrow{CK} = \vec{a}$, $\overrightarrow{KD} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **996.** $\frac{3}{4}\vec{a}$. **997.** Указание. Воспользоваться теоремой п. 39.

Глава XI

998. а) -4; б) 20; в) -1; г) 5. **999.** а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) 1; д) -1; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и) число k не существует. **1000.** а) Да; б) да. **1001.** Указание. Доказательство провести методом от противного и воспользоваться леммой о коллинеарных векторах. **1002.** $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b}$. **1003.** а) $x = -1$, $y = 3$; б) $x = 4$, $y = -5$; в) $x = 0$, $y = 3$; г) $x = -1$, $y = \frac{1}{3}$. **1005.** а) $\vec{a}\{2; 3\}$; б) $\vec{b}\{-2; 3\}$, $\vec{c}\{2; 0\}$; в) $\vec{d}\{-3; -4\}$, $\vec{e}\{2; -2\}$, $\vec{f}\{-4; -5\}$. **1006.** а) $\vec{a}\{2; 3\}$, $\vec{b}\left\{-\frac{1}{2}; -2\right\}$, $\vec{c}\{8; 0\}$, $\vec{d}\{1; -1\}$, $\vec{e}\{0; -2\}$, $\vec{f}\{-1; 0\}$. **1007.** а) $\vec{x} = -3\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j}$; б) $\vec{y} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$; в) $\vec{z} = -\vec{i}$; г) $\vec{u} = 3\vec{j}$; д) $\vec{v} = \vec{j}$. **1008.** а) $x = 5$, $y = -2$; б) $x = -3$, $y = 7$;

в) $x = -4$, $y = 0$; г) $x = 0$, $y = 0$. **1009.** а) $\{5; 7\}$; б) $\{4; 1\}$; в) $\{1; 1\}$; г) $\{-1; 0\}$. **1010.** а) $\{3; 2\}$; б) $\{6; 0\}$; в) $\{-1; 9\}$; г) $\{-7; -2\}$. **1011.** $2\vec{a}\{6; 4\}$, $3\vec{a}\{9; 6\}$, $-\vec{a}\{-3; -2\}$, $-3\vec{a}\{-9; -6\}$. **1012.** $\{-2; -4\}$, $\{2; 0\}$, $\{0; 0\}$, $\{2; 3\}$, $\{-2; 3\}$, $\{0; -5\}$. **1013.** а) $\{21; -21\}$; б) $\{13; 24\}$; в) $\{-21; -14\}$; г) $\{8; -10\}$. **1014.** Указание. Воспользоваться леммой о коллинеарных векторах. **1015.** $\vec{a}$ и $\vec{c}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$. **1016.** а) $A(5; 0)$, $B(0; 3)$, $O(0; 0)$; б) $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $O(0; 0)$, $C(a; b)$. **1017.** $\vec{a}\{100; 75\}$. **1018.** $M(3; -3)$, $N(3; 3)$, $Q(-3; -3)$ или $M(3; -3)$, $N(-3; -3)$, $Q(3; 3)$. **1019.** $A(-a; 0)$, $B(a; 0)$, $C(0; h)$. **1020.** $(7; -3)$. **1021.** а) $\{-4; 0\}$; б) $\{0; 26\}$; в) $\{3; 4\}$; г) $\{-4; -3\}$. **1022.** 1) $\overrightarrow{AB}\{1; 1\}$; 2) $x = -3$, $y = -4$; 3) $A(6; 1{,}5)$; 4) $B(a + c; b + d)$; 5) $B(1; 2)$. **1023.** 1) $M\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$; 2) $A(-10; -11)$; 3) $B(6; -11)$; 4) $M(-1{,}5; 3{,}5)$; 5) $B(2a - c; 2b - d)$; 6) $M(3; 6{,}5)$; 7) $M(2t + 6; 0)$; 8) $B(-1; -3)$. **1024.** $C(10; -7)$, $D(7{,}5; -5)$. **1025.** а) $\sqrt{106}$; б) 5; в) $10\sqrt{2}$; г) $\sqrt{389}$; д) $11\sqrt{2}$; е) 10. **1026.** а) 2; б) 3; в) $\sqrt{13}$. **1027.** а) 4; б) 8; в) 5; г) 5. **1028.** а) $\sqrt{82} + 2\sqrt{17} + 7\sqrt{2}$. **1029.** $\sqrt{13}$. **1030.** $AC = \sqrt{a^2 + h^2}$, $BC = \sqrt{b^2 + h^2}$. **1031.** $AC = \sqrt{(b + d - a)^2 + c^2}$, $OC = \sqrt{(b + d)^2 + c^2}$. **1032.** а) 2; б) 3 или $-2{,}6$. **1033.** а) 13; б) 6. **1034.** а) $MP = 3\sqrt{5}$, $NQ = 5$; б) $MP = 4\sqrt{2}$, $NQ = 2\sqrt{2}$. **1035.** Указание. Доказать, что отрезки AC и BD равны и их середины совпадают. а) 8; б) 17. **1036.** 3600 м. **1037.** 4400 м. **1040.** 100 см, 100 см. Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 315. **1041.** 13 см. Указание. Систему координат выбрать так, чтобы основание треугольника лежало на оси Ox, а высота — на оси Oy. **1042.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы одно из оснований трапеции лежало на оси Ox, а его концы были симметричны относительно начала координат. **1043.** Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 319, и доказать, что $b = 0$. **1044.** Указание. Систему координат выбрать так, чтобы лучи AB и AD были положительными полуосями. **1046.** а) A и C; б) B; в) B и D. **1047.** а) C; б) B; в) A и D. **1049.** а) $(-4; -3)$, $(-4; 3)$; б) $(4; 3)$, $(-4; 3)$. **1050.** а) $(3; 0)$, $(3; 10)$; б) $(-2; 5)$, $(8; 5)$. **1051.** 1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $x^2 + y^2 = 2$; 3) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$. **1052.** а) $x^2 + (y - 5)^2 = 9$; б) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$; в) $(x + 3)^2 + (y + 7)^2 = \frac{1}{4}$; г) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 100$. **1053.** $x^2 + y^2 = 10$. **1054.** $x^2 + (y - 6)^2 = 25$. **1055.** а) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 41$; б) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$. **1056.** $(x - 5)^2 + y^2 = 25$, $(x + 3)^2 + y^2 = 25$; две окружности. **1057.** $x^2 + (y - 4)^2 = 25$. **1058.** б) $x + y - 7 = 0$; в) $3x - 2y + 2 = 0$. **1059.** $7x - y + 3 = 0$. **1060.** а) $x - y = 0$, $y - 1 = 0$; б) $3x - 5y + 5 = 0$. **1061.** $x = 2$ и $y = 5$. **1063.** 7. **1064.** $5x + 2y - 10 = 0$, $5x - 2y - 10 = 0$, $5x + 2y + 10 = 0$, $5x - 2y + 10 = 0$ или $2x + 5y - 10 = 0$, $2x - 5y - 10 = 0$, $2x + 5y + 10 = 0$, $2x - 5y + 10 = 0$. **1070.** а) Окружность радиуса 4 с центром B; б) окружность радиуса $\frac{1}{3}$ с центром D, лежащим на отрезке BC, причём $BD = \frac{1}{3}$. **1071.** Окружность с центром в точке O радиуса $\sqrt{\frac{k^2 - 2a^2}{2}}$, если $k^2 > 2a^2$, и точка O, если $k^2 = 2a^2$, где O — середина отрезка AB и $a = \frac{AB}{2}$. Если $k^2 < 2a^2$, то точек, удовлетворяющих условию задачи, не существует. **1073.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB', где B' и B — точки, симметричные относительно точки A. **1074.** Прямая BC. Указание. Выбрать прямоугольную систему координат так, чтобы точки A и D лежали на оси Ox и были симметричны относительно оси Oy. **1075.** Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей ромба и перпендикулярная к стороне ромба. **1076.** а) $x = -\frac{1}{2}$; б) не существует; в) $x = -2$; г) $x = 2$. **1077.** а) $\{-8; -1\}$, $\sqrt{65}$; б) $\{14; 4\}$, $2\sqrt{53}$; в) $\{-21; 5\}$, $\sqrt{466}$; г) $\{6; -18\}$, $6\sqrt{10}$. **1078.** Указание. Ввести вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\{x_2 - x_1; 0\}$, отложить от начала координат вектор $\overrightarrow{OA}$, равный $\overrightarrow{M_1M_2}$, и воспользоваться тем, что абсцисса точки A равна $x_2 - x_1$. **1080.** Указание. Сначала доказать, что $AB = BC$. **1082.** (5; 0). **1083.** а) (–1; 9), (0; 2), (–4; 6); б) $5\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$. **1085.** 40. **1086.** (0; 8) или (–2; 2) или (–8; 0); три решения. **1087.** Окружности а), б), г), д). **1088.** $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$. **1089.** а) $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}$; б) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$. **1090.** а) $5x - 3y + 16 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$, $6x - y + 10 = 0$; б) $3x + 5y - 4 = 0$, $2x - y - 7 = 0$, $x + 6y - 23 = 0$; в) $3x + 5y - 17 = 0$, $2x - y + 6 = 0$; $x + 6y - 10 = 0$. **1093.** 19,5 см, $\sqrt{261}$ см, $\frac{\sqrt{2529}}{2}$ см или 12,5 см, $\sqrt{709}$ см, $\frac{\sqrt{4321}}{2}$ см. **1095.** Указание. Систему координат выбрать так, как показано на рисунке 319. **1096.** Указание. На продолжении отрезка AA_1 отложить отрезок AA_2 равный AA_1. Далее воспользоваться задачей 1039. **1097.** а) Окружность радиуса $2AB$ с центром в точке B', симметричной точке B относительно точки A; б) окружность радиуса $\frac{4}{3}AB$ с центром в точке C, лежащем на отрезке AB, причём $AC = \frac{2}{3}AB$.

Глава XII

1100. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) 0. **1101.** а) $\pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; в) ± 1. **1102.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 1; г) $-\frac{3}{4}$. **1103.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1; $\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1105.** а) $x = y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; б) $x = 0$, $y = 1{,}5$; в) $x = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$, $y = 2{,}5$ г) $x = -1$, $y = 0$; д) $x = \sqrt{3}$, $y = 1$. **1106.** а) 45°; б) 90°; в) 150°; г) 135°. **1107.** а) 45°; б) 135°;

в) 30°; г) 150°; д) 120°. **1108.** $y = x - 5$, $y = 5 - x$, (–10; 15). **1109.** а) $12\sqrt{6}$ см²; б) 27 см²; в) ≈ 36 см². **1111.** 16 см. **1112.** 25 см². **1113.** а) $\frac{h_b \cdot h_c}{2\sin\alpha}$; б) $\frac{h^2 \cdot \sin\beta}{2\sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}$. **1114.** а) $\angle C = 80°$, $a \approx 12{,}3$, $b \approx 9{,}1$; б) $\angle B = 75°$, $c \approx 4{,}5$, $a \approx 2{,}3$; в) $\angle B \approx 37{,}989° \approx 37°59'$, $\angle C \approx 62°01'$, $c \approx 14$; г) $\angle A = 65°$, $b \approx 19{,}2$, $c \approx 25{,}5$; д) $\angle B \approx 37{,}317° \approx 37°19'$, $\angle C \approx 82°41'$, $c \approx 11$; е) $c \approx 5{,}7$, $\angle A = \angle B = 63°$; ж) $a \approx 58{,}84$, $\angle B \approx 36{,}296° \approx 36°18'$, $\angle C \approx 56°42'$; з) $\angle A = 42{,}833° \approx 42°50'$, $\angle B \approx 60{,}941° \approx 60°57'$, $\angle C \approx 76°13'$; и) $\angle A \approx 54{,}883° \approx 54°52'$, $\angle B \approx 84{,}27 \approx 84°16'$, $\angle C \approx 40°52'$. **1115.** $AB \approx 15$ см, $S_{ABC} \approx 87$ см². **1116.** $AC = 6$ м, $AB \approx 3$ м, $BC \approx 4$ м. **1117.** ≈ 39°38′, ≈ 117°52′ или ≈ 140°22′, ≈ 17°08′. **1118.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}$, $\frac{a\sin\beta}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$, $\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)\cos\gamma}$, где $\gamma = \frac{\alpha - \beta}{2}$, если $\alpha \geqslant \beta$, и $\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2}$, если $\beta > \alpha$. **1119.** $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$, $\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$, $\cos\gamma = \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2\cos^2\alpha}}$, где γ – угол между диагоналями параллелограмма. **1120.** а) Остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. **1121.** ≈ 74,2 кг. **1123.** ≈ 28 см. **1124.** 60° или ≈ 47,112° ≈ 47°7′. **1125.** ≈ 52 м. **1126.** ≈ 14,5 м. **1127.** 50 м. **1128.** а) 45°; б) 90°; в) 90°; г) 90°; д) 180°; е) 90°; ж) 135°; з) 0°. **1129.** а) 60°; б) 120°; в) 120°; г) 90°; д) 0°; е) 180°. **1130.** а) $3\sqrt{2}$; б) 0; в) $-3\sqrt{2}$. **1131.** а) $\frac{1}{2}a^2$; б) $-\frac{1}{2}a^2$; в) 0; г) a^2. **1132.** 13. **1133.** а) –2,5; б) 0; в) 5. **1136.** а) $x = 7{,}5$; б) $x = \frac{2}{3}$; в) $x = 0$. **1137.** $\cos A = \frac{3}{5}$, $\cos B = 0$, $\cos C = \frac{4}{5}$. **1138.** $\angle A = 60°$, $\angle B \approx 21°47'$, $\angle C \approx 98°13'$. **1139.** $\sqrt{129}$ и 7. **1140.** 3. **1141.** 13. **1142.** –5. **1146.** $BE = \frac{b}{2}$, $AD = \frac{b}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $AE = \frac{b}{2}\sqrt{3}$, $EC = \frac{b}{2}(2 - \sqrt{3})$, $BC = b\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. **1147.** а) ≈ 6,254 м²; б) ≈ 6449073 м². **1149.** а) $\angle C = 105°$, $AC \approx 6$ см, $BC \approx 4$ см; б) $\angle A = 75°$, $BC \approx 6$ см, $AC \approx 4$ см; в) $\angle C \approx 42°55'$, $\angle B \approx 88°35'$, $AC \approx 4$ см; г) $\angle A \approx 26°22'$, $\angle C \approx 90°50'$, $AB \approx 11{,}7$ см. **1150.** а) $BC \approx 12$ см, $\angle C \approx 17°45'$, $\angle B \approx 27°15'$; б) $AC = \sqrt{5}$ дм, $\angle A \approx 71°34'$, $\angle C \approx 63°26'$; в) $AB \approx 6{,}4$ дм, $\angle A \approx 2°$, $\angle B \approx 28°$. **1151.** $\angle D \approx 117°10'$, $\angle E \approx 38°59'$, $\angle F \approx 23°51'$. **1152.** $\frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b + c}$. Указание. Воспользоваться формулой площади треугольника (п. 104). **1153.** $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$. **1154.** $-\frac{5\sqrt{34}}{34}$. **1155.** 5. **1156.** 15 и ≈ 24,4. **1157.** $x = 40$. **1158.** 36°51′. **1159.** $72\sqrt{3}$ см²; 12 см. **1160.** $\sqrt{21}$. Указание. Воспользоваться задачей 1122. **1161.** $\frac{a^2\sin^2 3\alpha\sin 4\alpha}{\sin^2\alpha}$. **1164.** Указание. а) Воспользоваться задачами 642 и 1163; б) воспользоваться задачей 1163. **1166.** Указание. а) Воспользоваться задачей 1122; б) пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — данные подобные треугольники, а O_1 и O_2 — центры вписанных окружностей. Сначала доказать, что $\triangle A_1O_1B_1 \sim \triangle A_2O_2B_2$.

Глава XIII

1167. а) Да; б) нет. **1168.** б), в). **1170.** а) 60°; б) 108°; в) 120°; г) 144°; д) 160°. **1171.** 360°. **1172.** а) 3; б) 4; в) 8; г) 12. **1173.** а) 6; б) 12; в) 4; г) 10; д) 20; е) 5. **1174.** Указание. Воспользоваться тем, что серединный перпендикуляр к любой стороне правильного многоугольника проходит через центр описанной окружности. **1175.** Указание. Воспользоваться тем, что биссектриса любого угла правильного многоугольника проходит через центр вписанной окружности. **1176.** 1) $R = 3\sqrt{2}$, $r = 3$, $P = 24$, $S = 36$; 2) $R = 2\sqrt{2}$, $a_4 = 4$, $P = 16$, $S = 16$; 3) $r = 2\sqrt{2}$, $a_4 = 4\sqrt{2}$, $P = 16\sqrt{2}$, $S = 32$; 4) $R = 3{,}5\sqrt{2}$, $r = 3{,}5$, $a_4 = 7$, $S = 49$; 5) $R = 2\sqrt{2}$, $r = 2$, $a_4 = 4$, $P = 16$. **1177.** 1) $r = 1{,}5$, $a_3 = 3\sqrt{3}$, $P = 9\sqrt{3}$, $S = \frac{27\sqrt{3}}{4}$; 2) $R = \frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$,) $r = \frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$, $a_3 = 2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$, $P = 6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$; 3) $R = 4$, $a_3 = 4\sqrt{3}$, $P = 12\sqrt{3}$, $S = 12\sqrt{3}$; 4) $R = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, $P = 15$, $S = \frac{25\sqrt{3}}{4}$; 5) $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $a_3 = 2$, $S = \sqrt{3}$. **1178.** $2\sqrt{6}$ см. **1179.** $2\sqrt{3}$ см. **1180.** 6 см. **1181.** $32\sqrt{3}$ см. **1183.** а) 36 см²; б) $16\sqrt{3}$ см²; в) $162\sqrt{3}$ см²; г) ≈ 248,52 см². **1184.** $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ см². **1185.** $S_3 : S_4 : S_6 = \sqrt{3} : 4 : 6\sqrt{3}$. **1186.** 3 : 4. **1187.** а) $2\sqrt{3}r$, $6\sqrt{3}r$, $3\sqrt{3}r^2$; б) $\sqrt{3}R$, $3\sqrt{3}R$, $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. **1188.** $\sqrt{2}R^2$. **1189.** в), г) Указание. Воспользоваться задачей 2 п. 117. **1190.** 1) 25,12; 2) 18, 84; 3) 13,06; 4) 9; 5) 4,40; 6) 1; 7) 637, 42; 8) 14,65; 9) 0,45. **1191.** а) Увеличится в 3 раза; б) уменьшится в 2 раза; в) увеличится в k раз; г) уменьшится в k раз. **1192.** а) Увеличится в k раз; б) уменьшится в k раз. **1193.** а) $\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3}$; б) $\pi\sqrt{a^2 + b^2}$; в) $\frac{2\pi b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$; г) $\frac{\pi a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; д) 8π. **1194.** а) πa; б) $\pi c(\sqrt{2} - 1)$; в) $\pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)$; г) $2\pi h \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **1195.** 63 см. **1196.** ≈ 12 739 км. **1197.** ≈ 42 013 км. **1198.** а) π см; б) $\frac{3}{2}\pi$ см; в) 2π см; г) 3π см. **1199.** 30. **1200.** ≈ 59,2 см. **1201.** ≈ 36,2 см. **1202.** ≈ 4°35′. **1205.** 1) 12,56; 2) 78,5; 3) 1,69; 4) 0,26; 5) 7; 6) 9258,26; 7) 9,42; 8) 1,41. **1206.** а) Увеличится в k^2 раз; б) уменьшится в k^2 раз; **1207.** а) $\frac{\pi(a^2 + b^2)}{4}$; б) $\frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$; в) $\frac{\pi(a^2 + 4h^2)}{64h^2}$. **1208.** а) $\frac{\pi a^2}{12}$; б) $\frac{\pi a^2 \sin^2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)^2}$; в) $\frac{\pi a^2 \sin^2\alpha}{4\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$;

г) $\frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **1209.** $\approx 34{,}2$ м². **1210.** $D \approx 13{,}06$ м, $S \approx 133{,}84$ м². **1211.** 4π см². **1212.** 0,75 мм. **1213.** $5{,}6\pi$ дм³ $\approx 17{,}6$ дм³. **1214.** $r^2(\pi - 2)$. **1215.** Площадь наименьшего круга равна π, а площади колец равны 3π, 5π, 7π. **1217.** ≈ 262 см². **1218.** $\sqrt{\frac{5S}{\pi}}$. **1219.** $\frac{4-\pi}{4}a^2$. **1221.** а) 20; б) 9; в) 5; г) 6. **1222.** $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ дм. **1223.** 6,72 см. **1224.** а) $\frac{3\sqrt{6}}{8}$ б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **1227.** 6 см; $54\sqrt{3}$ см². **1229.** 330 км. **1230.** а) $\approx 15{,}1$ см; б) $\pi a \sin\alpha$. **1231.** $\approx 4{,}4$ км. **1233.** $\frac{\pi}{2}(20 + 9\sqrt{2})$ см. **1234.** $\frac{65}{4}\pi$ см. **1236.** Указание. Пусть $ABCDEFGH$ — искомый восьмиугольник, а O — центр описанной окружности. Сначала построить равнобедренный треугольник ABO. **1237.** Указание. Использовать теорему Пифагора. **1238.** Указание. Сначала вписать в окружность правильный треугольник и правильный шестиугольник.

Глава XIV

1243. Указание. Воспользоваться тем, что при движении три точки, не лежащие на одной прямой, отображаются на три точки, не лежащие на одной прямой. **1244.** Указание. Доказать методом от противного. **1247.** Указание. Воспользоваться теоремой п. 124. **1248.** Указание. Доказательство провести методом от противного (см. доказательство теоремы п. 124). **1250.** Указание. Воспользоваться задачами 1249 и 1140. **1251.** Указание. Сначала построить образы каких-нибудь двух точек прямой b. **1252.** F — четырёхугольник. **1253.** а) и б). **1254.** Указание. Если $a \nparallel a_1$, то использовать осевую симметрию, а если $a \parallel a_1$ — центральную или осевую симметрии или параллельный перенос. **1255.** Указание. Использовать соответствия, которые можно установить между точками фигур F_1 и F_2 и фигур F_2 и F_3. **1256.** Да. **1257.** Указание. Использовать соответствие, которые можно установить между точками фигуры P и фигуры Q; б) см. задачу 1255. **1269.** Указание. В случае, когда центр O поворота не принадлежит прямой a, постройте перпендикуляр из точки O к этой прямой. **1277.** Нет. **1278.** Нет. **1282.** Указание. Использовать поворот с центром в точке B. **1283.** Указание. Использовать поворот с центром в точке B. **1284.** Указание. Использовать поворот вокруг центра квадрата. **1285.** Указание. Использовать поворот вокруг центра квадрата. **1287.** Да. **1288.** Указание. Использовать точки D_1 и D_2, симметричные точке D относительно прямых AB и BC. **1290.** Указание. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AD}$. **1291.** Указание. Учесть, что высоты треугольника, на который отображается треугольник ABS при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$, пересекаются в одной точке. **1292.** Указание. Использовать поворот вокруг точки O на угол в 120°. **1293.** Указание. Сначала построить прямую, симметричную одной из данных прямых относительно точки O. **1294.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AD и BC. Сначала построить треугольник ACD_1, где D_1 — точка, в которую отображается точка D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Глава XV

1296. $\angle A$ и $\angle G$, $\angle F$ и $\angle N$, $\angle E$ и $\angle M$, $\angle D$ и $\angle L$, $\angle C$ и $\angle K$, $\angle B$ и $\angle H$; AF и GN, FE и NM, ED и ML, DC и LK, CB и KH, BA и HG. **1298.** а) Да; б) нет. **1299.** а) $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$ с коэффициентом $\frac{1}{2}$; б) $\angle A_1 = 90°$, $\angle C_1 = 100°$; в) $A_1B_1 = 8$, $CD = 5$. **1300.** $x = 5\frac{2}{5}$, $y = 6\frac{2}{3}$, $z = 8\frac{1}{3}$, $t = 4\frac{1}{5}$, $\alpha = 145°$, $\beta = 70°$. **1301.** $P \sim P_1$. **1302.** Да. **1303.** а) Нет; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) нет. **1304.** 5 : 2. **1305.** 10 см. **1306.** 1) $k = 3$; 2) $S_2 = 160$ см^2; 3) $S_1 = 24$ дм^2; 4) $k = 2$; 5) $S_1 = 4a^3$ см^2. **1307.** б) k^2a^2. **1308.** 4,5 м. **1319.** Да, $k_1 = 3$. **1320.** а) Трапеция; б) пара пересекающихся прямых под углом 30°. **1325.** а) 4; б) 12; в) 0,25. **1326.** $8\sqrt{2}$ см. **1329.** а) 6 см; б) 7,5 см. **1330.** Указание. Воспользоваться теоремой о произведении отрезков секущих (п. 136). **1331.** Указание. Воспользоваться теоремой о произведении отрезков пересекающихся хорд (п. 136). **1333.** а) $MA = 5$; $AB = 3$; б) $MA = 6$; в) $MA = 1{,}6$. **1335.** Указание. Использовать метод решения задачи 2 п. 137. **1336.** Указание. Использовать метод решения задачи 2 п. 137. **1339.** Указание. Использовать способ решения задачи 1 п. 137. **1342.** Указание. Пусть M — произвольная точка прямой AB, а M' — её образ. Используя равенства $AM = AM'$, $BM = BM'$, доказать, что точки M и M' совпадают. **1343.** Воспользоваться задачей 1248. **1344.** а) Указание. Воспользоваться задачей 1250. **1345.** а) $x = 6\frac{2}{3}$, $y = 9\frac{1}{3}$, $z = 5\frac{1}{3}$, $\alpha = 60°$, $\beta = 110°$; б) $x = 14$, $y = 27$, $z = 18$, $\alpha = 50°$, $\beta = 70°$. **1346.** 12 см, 16 см или 15,36 см, 11,52 см. **1347.** а) 1 : 9; б) 1 : 4. **1348.** Указание. Учесть, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$ с коэффициентом $k = \sqrt{2}$. **1350.** а) $\frac{5}{2}$; б) $-\frac{3}{2}$; в) $-\frac{7}{2}$; г) $\frac{2}{9}$. **1351.** Два решения. **1352.** Одно решение. **1359.** Указание. Использовать способ решения задачи 1 п. 137. **1360.** Указание. Воспользоваться теоремой о квадрате отрезка касательной к окружности (п. 136). **1361.** Указание. Воспользоваться теоремой о квадрате отрезка касательной к окружности (п. 136) и утверждением 2^0 п. 71. **1365.** Указание. Использовать задачу 1 п. 137. Центр расположен на прямой OA, а радиус равен $\frac{r}{2}$. **1366.** Указание. Использовать свойство медиан треугольника и свойство 1^0 п. 134. **1367.** Указание. Воспользоваться задачей 1366.

Задачи повышенной трудности

1369. Параллелограмм. **1370.** Параллелограмм. Указание. Воспользоваться задачей 1, п. 92. **1371.** Указание. Учесть, что длины векторов $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ и $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ равны. **1372.** Указание. Пусть точки A, B и C лежат на одной прямой. Сначала доказать, что в этом случае $\overrightarrow{AB} = n\overrightarrow{AC}$, где n — некоторое число. В качестве k, l, m можно взять, например, числа $k = n - 1$, $l = 1$, $m = -n$. При доказательстве обратного утверждения взять точку O, совпадающую с точкой A. **1373.** Указание. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ точки E и F — середины диагоналей AC и BD, а G — точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон. Используя задачу 979, для произвольной точки O выразить векторы $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ и $\overrightarrow{OG}$ через $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и воспользоваться задачей 1372. **1374.** У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 1372. **1375.** У к а з а н и е. Пусть A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Пользуясь тем, что $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB_1}$ и $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC_1}$, доказать, что $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. **1376.** У к а з а н и е. Использовать координаты середин диагоналей AC и BD. **1377.** У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что отношение соответствующих координат векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ равно λ. **1378.** $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 1377. **1379.** $D\left(\frac{15}{11}; \frac{24}{11}\right)$. У к а з а н и е. Воспользоваться задачей 1377. **1380.** $3\sqrt{5}$ см. У к а з а н и е. Принять за оси координат прямые AM и BN. **1381.** $\left(\frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3}; \frac{y_1m_1 + y_2m_2 + y_3m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\right)$. **1382.** а) $M\left(2\frac{3}{4}; 0\right)$; б) $M(2; 0)$. У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что если две точки лежат по разные стороны от оси абсцисс, то искомая точка является точкой пересечения отрезка с концами в этих точках и оси абсцисс. **1383.** У к а з а н и е. а) Пусть L — линия, заданная данным уравнением, а $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая её точка. Написать уравнение серединного перпендикуляра к отрезку M_1M_2, где $M_1(x_0 - A, y_0 - B)$, $M_2(x_0 + A, y_0 + B)$ и убедиться в том, что оно совпадает с данным уравнением. б) Учесть, что уравнение любой окружности не содержит членов вида kxy, где k — число, $k \neq 0$. **1384.** (1; 0), (–0,6; 0,8), $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **1385.** а) Окружность, точка или пустое множество. б) Прямая, вся плоскость или пустое множество. У к а з а н и е. Вывести уравнение искомого множества точек. **1386.** Окружность без одной точки. У к а з а н и е. Вывести уравнение искомого множества точек, задав систему координат так, чтобы прямая a совпала с одной из осей координат, а точка A лежала на другой оси. **1387.** Окружность радиуса kR, где R — радиус данной окружности. У к а з а н и е. Ввести систему координат с началом в точке O и вывести уравнение искомого множества. **1388.** б) У к а з а н и е. Воспользоваться теоремой, обратной теореме Пифагора. **1389.** У к а з а н и е. Положив $MN = a$, сначала найти площадь треугольника AMB и стороны AM и BM. **1390.** У к а з а н и е. Доказать, что в любом выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ имеет место равенство $S_{ODC} \cdot S_{OAB} = S_{OBC} \cdot S_{OAD}$ (O — точка пересечения диагоналей). **1391.** У к а з а н и е. Доказать утверждение сначала для выпуклого четырёхугольника. Для этого провести диагональ, соединяющую общий конец сторон a и d с общим концом сторон b и c, и найти площади получившихся треугольников. **1392.** У к а з а н и е. Воспользоваться тем, что $S_{ABC} = S_{AA_1B} + S_{AA_1C}$. **1393.** $\sqrt{\frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad + bc}}$, $\sqrt{\frac{c^2ab + d^2ab + a^2dc + b^2dc}{ab + dc}}$, где a, b, c, d — стороны вписанного четырёхугольника. **1394.** У к а з а н и е. Пользуясь теоремой косинусов, доказать, что синус угла, заключённого между сторонами a и b, равен $\frac{2\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}{ab + cd}$, где p — полупериметр. **1395.** У к а з а н и е. Доказать сначала, что прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей, перпендикулярна одной из биссектрис тогда и только тогда, когда вписанная окружность касается одной из сторон треугольника в точке, равноудалённой от середины этой стороны и основания высоты, проведённой к этой стороне. **1396.** $72\sin\alpha\cos^3\alpha$. **1397.** $2\sqrt{S\operatorname{tg}\beta}$. **1398.** $\frac{l^2-h^2}{2h}$. **1399.** Указание. Сначала найти и сравнить углы BAC и AOB. **1400.** Указание. Воспользоваться задачей 1399. **1401.** Указание. Пусть M — середина отрезка A_1A_4. Доказать, что треугольник AA_1M равнобедренный, и, пользуясь этим, установить, что центр описанной около пятиугольника окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ACM. **1402.** Указание. Воспользоваться задачей 1400. **1403.** Указание. Воспользоваться задачей 1402. **1404.** Указание. Воспользоваться задачей 1403. **1405.** Указание. Соединить точку M отрезками с вершинами многоугольника и представить площадь многоугольника в виде суммы площадей полученных треугольников. **1406.** Указание. Воспользоваться задачей 918. **1411.** Указание. Воспользоваться задачей 1248. **1412.** Указание. Построить равные равнобедренные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами A и A_1 и воспользоваться задачей 1249. **1414.** Указание. Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — данные трапеции с бóльшими основаниями AB и A_1B_1. На лучах AB и A_1B_1 отложить отрезки $AE = DC$ и $A_1E_1 = D_1C_1$ и к треугольникам BCE и $B_1C_1E_1$ применить утверждение задачи 1249. **1415.** Указание. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle B - \angle C = \angle B_1 - \angle C_1$. Рассмотреть две осевые симметрии относительно прямых, содержащих высоты AH и A_1H_1 данных треугольников. **1416.** Указание. Использовать центральную симметрию относительно точки пересечения диагоналей одного из параллелограммов. **1417.** Указание. Использовать осевую симметрию относительно данной прямой. **1418.** Указание. Если точка M лежит на стороне OB, то сначала построить прямую, симметричную прямой AO относительно точки M. **1420.** Указание. Пусть O — точка пересечения медиан искомого треугольника ABC, а O_1 — точка, симметричная точке O относительно середины стороны AC. Сначала построить $\triangle AOO_1$. **1421.** Указание. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция с основаниями AB и CD. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. **1422.** Указание. Использовать параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$. **1423.** Указание. Использовать поворот вокруг точки A на угол $90°$. **1424.** Указание. Использовать метод решения задачи 2 п. 137. **1425.** Указание. Сначала построить прямоугольный треугольник со сторонами m и n. **1427.** Указание. Использовать метод решения задачи 2 п. 137. **1428.** Указание. Воспользоваться теоремой о квадрате отрезка касательной (п. 136) для каждой окружности. **1429.** Указание. Использовать гомотетию с центром в точке пересечения высот и коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. **1430.** Указание. Пусть E — точка пересечения луча BD с окружностью, описанной около треугольника ABC. Воспользоваться подобием треугольников ABE и BCD. **1431.** Указание. Использовать гомотетию с центром в точке пересечения высот и коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.

Предметный указатель

Оглавление